BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

Ph. 2775 b.

[illegible]

für

[illegible] Landmesser, [illegible] Oekonomen und Freunde der Meßkunst,

und

[illegible]

von

[illegible]

[illegible]

Mit [illegible] und vier Kupfer-Tafeln.

Erfurt. 1804.

bey Georg Adam Keyser.

Math. P. 478 d

Matheſis. Geometria applicata.
448.

R

Theoretiſch-Praktiſcher Selbſtunterricht in den erſten Anfangsgründen der Meßkunſt.

Ein Stück Feld, Wald ꝛc. aufzunehmen, zu berechnen und zu theilen,

für

Forſtwiſſenſchaft-Befliſſene, empiriſche Landmeſſer, Gerichtsſchöppen, Dorfſchulzen, Oeconomen und Freunde der Meßkunſt,

zur

Beförderung richtiger Meſſungen und zur Ueberzeugung der Unzuverläſſigkeit der gewöhnlichen empiriſchen Vermeſſungsmethoden entworfen

von

Carl Chriſtian Rommerdt,

Fürſtl. Hohenlohiſcher Cammer-Aſſeſſor und Provinzial-Geometer in der Grafſchaft Obergleichen; auch ordentl. Mitglied, der Societät der Forſt- und Jagdkunde in Meinungen.

Mit Trigonometriſchen und vier Kupfer-Tafeln.

Erfurt, 1804.

Bey Georg Adam Keyſer.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Durchlauchtigſten Erbprinzen

und Herrn,

Herrn

Friedrich Auguſt Carl,

ſo wie

Dem

Durchlauchtigſten Erbprinzen

und Herrn,

Herrn

Georg Ludwig Moritz,

und

Dem

Durchlauchtigſten Erbprinzen

und Herrn,

Herrn

Ernſt Chriſtian Carl,

ſeinen

gnädigſten Erbprinzen und Herren

zu

Hohenlohe Jngelfingen,

= = = Kirchberg, und

= = = Langenburg;

widmet

gegenwärtige Schrift,

als ein geringes Merkmal ſeiner gröſseſten

Verehrung und Ehrfurcht,

devoteſt

der Verfaſſer.

Vorrede.

So lange noch nicht ſolche Staats-Einrichtungen getroffen werden, daß auch unbegüterte, ſich den Forſtwiſſenſchaften widmende Landeskinder, Forſt-Lehranſtalten frequentiren können, oder allenthalben ſchon ſolche Forſtbediente angeſtellt ſind, welche ſämmtliche, mit Recht bey ihnen vorauszuſetzende Kenntniſſe beſitzen, wird man den großen Nutzen und die Nothwendigkeit, zweckmäßiger Anleitungen zum Selbſtunterrichte in den geometriſchen Hülfswiſſenſchaften, für Forſtlehrlinge, wohl nicht bezweifeln und verkennen wollen. — Dergleichen Hülfsmittel zur Selbſtbelehrung, ſind aber auch nicht minder ſelbſt für den, dieſe Hülfskenntniſſe beſitzenden, als noch durch Privatfleiß nachzuholenden Forſt-Lehrprincipal, nützlich; beyde können ſolche beym Unterrichte ihrer

Lehr- und Revierburſchen, zu großer Erleichterung dieſer Bemühungen, zum Grunde legen, und mit wenigerm Zeitaufwande, als ohne dieſelben, Staats und privatnützlich die Wahrheit des „docendo diſcimus", erforſchen.

In der Regel, fehlt es dem Oeconomen ebenfalls an mündlicher inſtructiver Anleitung, und wer weiß es nicht, wie nützlich und faſt unentbehrlich dieſem, wie auch dem Kunſtgärtner, die Anfangsgründe der Meßkunſt ſind. Und —! ſollte man wohl den, die Sicherung des Grundeigenthums der Unterthanen beabſichtigenden und wirklich befördernden Zweck, eines ſolchen-, die Pſeudofeldmeſſer belehrenden Unterrichtes, nicht eines belohnenden Beyfalls würdigen? Findet man nicht leider faſt noch in allen Staaten, die Beſorgung der geometriſchen öffentlichen autoriſirten Geſchäfte, auf dem Lande den Händen, der, von allen grundſätzlichen Kenntniſſen der Geometrie völlig entblößten Dorfſchulzen, Gerichtsſchöppen, oder ähnlichen wiſſenſchaftlich geometriſch Ungebildeten anvertraut? Mit einer unglaublichen Dummdreiſtheit und Miene der Zuverläſſigkeit, un-

ternehmen ſolche Leute oft Vermeſſungen, welche ſelbſt der geſchickteſte Geometer mit vieler Aufmerkſamkeit behandeln würde, und deſpotiſiren *bona* fide (im leidlichſten Falle) über das Eigenthum ihrer Mitbürger, auf eine rechtlich unverzeihliche Art. Selbſt der größeſte Richter und Advocat, läßt ſich von dieſen Meßkünſtlern, ohne es zu wiſſen, aufs gröblichſte zu Ungerechtigkeiten verleiten; ihr Ausſpruch, ihr Gutachten, heiſt es, hat fidem —! Wann wird doch die Zeit kommen, wo Candidaten der Meßkunſt, gleich ſtreng, als die Candidaten der Rechte ꝛc. vor ihrer Zulaſſung zu öffentlichen Geſchäftsbeſorgungen, geprüft werden; wann werden aber auch Rechtscandidaten, unerläßlich, gründliche, zureichende Kenntniß der Matheſis forenſis, ohne welche der Advocat und der Richter diejenigen Rechtsgegenſtände, zu deren richtiger Würdigung ſolche Vorkenntniſſe unentbehrlich ſind, niemals aus dem vollkommen richtigen Geſichtspuncte beurtheilen, dem Geometer z. E. nur ſehr ſelten völlig zweckdienliche Anſichten und Aufträge, über ſtreitige, geometriſch zu unterſuchende Puncte, geben können, ebenfalls in Prüfun-

gen und durch zweckmäßige Probe-Arbeiten do-cumentiren müſſen? Warum mögen ſolche wichtige Gegenſtände, von den Einſichtsvoll-ſten Regenten und höhern Collegien, nicht mehrerer Aufmerkſamkeit gewürdigt werden —?

Ueberhaupt kommen faſt alle nicht bloß öffentliche, ſondern auch privat Geſchäfts-männer, in mehrere Lagen, in welchen den-ſelben geometriſche Kenntniſſe ſo angenehm als nützlich, ja oft wohl nothwendig ſind; und Hülfsmittel zum Selbſtunterrichte, die-ſen alſo eben ſo willkommen, als den vorhin genannten, ſeyn müſſen. Nach meiner Ueber-zeugung ließen ſich nun diejenigen theoreti-ſchen und practiſchen Lehren, welche jedes dieſer Subjecte für ſeinen Zweck bedarf, ſehr gut auf eine ſolche Art in einer einzigen Schrift darſtellen, daß der Inhalt derſelben, einen vollkommen zureichenden Unterricht für den Einen, und ſehr nützliche, zum weitern Fort-ſtudieren in den angegebenen Quellen auf-munternde Vorbereitungslehren, für den noch wißbegierigern Andern, in ſich faſſe. Nur allein die mehrjährige Erfahrung, durch ſorgliche Aufmerkſamkeit und glückliche Wahl der Lehrmethode, ſelbſt nichtmathematiſchen

Köpfen, Liebe und Studienfleiß, für dieſen oder jenen Theil, der ſo gemeinnützlichen Mathematik, eingeflößt, und faſt ohne Ausnahme, Nutzen, durch meinen Unterricht geſtiftet zu haben, konnten mich zu der Herausgabe der gegenwärtigen theoretiſch = practiſchen Anleitung zum Selbſtunterrichte, veranlaſſen und ſolche wagen laſſen. Im Ganzen hatte noch keine bis daher erſchienene Schrift — wenigſtens ſo viel mir bekannt iſt — den Zweck der vorliegenden; einige nach dem Titel ähnliche, und zum Theil ſehr ſchätzbare geometriſche Producte, enthalten, für den größern Theil derjenigen, für welche dieſes Buch beſtimmt iſt, entweder zu viel oder zu wenig Theorie; und ſind deshalb die practiſch = geometriſchen Anleitungen, entweder zu ſchwer zu verſtehn, von zu großem Umfange, oder zu ſpeciell für einzelne Fälle, und ohne die Gründung derſelben in der Theorie zu zeigen, mitgetheilt; ſo, daß der Anfänger, wenn er ein und denſelben Fall und Gegenſtand, nur in einer etwas veränderten Geſtalt ihm entgegen treten ſieht, ſich ſchlechterdings nicht zu helfen weiß. Oder, es ſind ſolche Werke zum Theil von Männern

bearbeitet, welche ſelbſt niemals Privat-Unterricht ertheilten, alſo die Beſchwerden gar nicht kennen, nicht ahnden, mit welchen der ſich Selbſtunterrichtende zu kämpfen hat. Oft wird dieſem und jenem theoretiſch praktiſchgebildeten Schriftſteller, der Vorwurf gemacht, „er laſſe durch ſeine detaillirte und einleuchtende Darſtellung, dem Forſchungsgeiſte des Lernenden, zu wenig Feld übrig! Nach meiner Erfahrung und Ueberzeugung, möchte dieſer Fall doch aber wohl nur äußerſt ſelten, nur bey excellirenden Anlagen des Lernenden, oder dem gebildeten Geiſte des Philoſophen, eintreten können; Verſuche mit ſchon denkenden jungen Leuten, werden jeden belehren, daß ſelbſt ſolche Subjecte oft in Stellen Anſtoß finden, welche dem Eingeweihten auch nicht die Ahndung einer Undeutlichkeit ꝛc. zulaſſen. Nur ſehr ſelten finden ſich ſolche gute und beharrliche Köpfe, denen das, den Mathematiker entzückende Euclideïſche Gewand des Vortrags, ohne mündliche gute Anleitung, nicht wahr zurückſchrekkend wird; nur Wenige ermüden nicht in dem, von dem gewöhnlichen, durch das ſtufen- und kettenartige Fortſchreiten abweichen-

de Nachdenken, welches das Selbſtſtudium ſolcher, den menſchlichen Geiſt erhebenden Schriften, erfordert. —

Den Geſichtspunct und Zweck, von welchem ich bey der Ausarbeitung dieſes Buches ausgng, und zu erzielen ſtrebte, glaube ich nunmehro beſtimmt genug angegeben zu haben, und nun noch Einiges über das Detail deſſelben ſagen zu müſſen.

Sachangemeſſen ſchien es mir, die Arithmetik und theoretiſche Geometrie, als die Baſis der practiſchen Geometrie, in einem Hauptteile, unter 2en Abſchnitten, zuſammen zu ſtellen; und um Wiederholungen, ſo viel als möglich zu vermeiden, in der letztern ſogleich die vollſtändige Anleitung zur geometriſchen Berechnung und Eintheilung der Figuren, ſo wie die Reduction der Maßen, mit vorzutragen; da ſolche überdieß unter diejenigen Vorkenntniſſe gezählt werden können, welche in der practiſchen Geometrie, ihre Anwendung finden. In dem andern Haupttheile konnte ich daher die geometriſche Aufnahme ſelbſt, in einem deſto vollkommenern Zuſammenhange, folgen laſſen.

In der Arithmetik, habe ich mich ſtets, ſo viel als möglich, der allgemeinen Darſtellungsart befliſſen, um Anfängern den Uebergang zu der Buchſtabenrechenkunſt, dadurch zu erleichtern. Die Lehre von den Logarithmen, iſt eigentlich nur für diejenigen angeſchloſſen, welche die Koſten für logarithmiſche Tafeln, aufwenden können, und dabey Sinn für das Nützliche derſelben, und die mathematiſchen Wiſſenſchaften überhaupt, haben. Die Aufnahme der Silberſchlagiſchen Proportions-Rechnungsmethode, wird von dem Anfänger, hoffentlich mit Dank erkannt, und von dem Kenntnißvollen Beurtheiler, meine Bemühungen für dieſe Mittheilung, nicht verkannt werden. Gern hätte ich dieſem Gegenſtande noch mehrere Ausführlichkeit und logicaliſchen Werth gegeben, wenn mich nicht die nöthige Raum-Erſparniß, und die Berückſichtigung, eines minder wiſſenſchaftlich gebildeten Theiles der Leſer, davon zurückgehalten hätten. — Vergleichung mit der Quelle (der Silberſchlagiſchen Schrift) wird ergeben, was ich, und ob ich, mit Nutzen für den Wißbegierigen, ſelbſt gedacht und gearbeitet habe. Eigene

Verſuche einer verſtändlichen und dennoch zuſammengedrängten Darſtellung dieſer Rechnungsart, werden auf die Schwierigkeiten eines ſolchen Unternehmens, erſt hinführen, und ein richtigeres und billigeres Urtheil, als die bloße Ueberſicht derſelben zuläßt, möglich machen. Sollten unpartheiſche Kunſtrichter, mir die Fähigkeit einer noch vollkommnern, und mehr für den größern Theil des Publikums zu fertigenden Ausarbeitung jener Skizze zutrauen, und zugleich einem ſolchen zweyten Verſuche, keine ungünſtige Aufnahme prognoſticiren, ſo wäre ich nicht abgeneigt, dieſen Weg zu verfolgen.

In der theoretiſchen Geometrie, bemühte ich mich, die, nach meiner Ueberzeugung erforderlichen Grade der Vollſtändigkeit, mit der möglichſt faßlichen Darſtellung, zu verbinden, und die wichtigſten Lehrſätze ꝛc. zugleich dergeſtalt zu ordnen, daß Ueberſicht und Auffindung derſelben, gleich leicht würde. Die ſparſamen Wiederholungen (welche ich für nützlich erachtete) geſchahen aus Gründen, welche bey dem, dieſem Buche vorliegenden Zwecke, ſich ſelbſt vertheidigen.

Die practiſche Geometrie, hoffe ich gleichfalls zweckmäßig vorgetragen zu haben. Zwecklos ſchien mir die Aufzählung und der Gebrauchsunterricht, mehrerer Inſtrumente, als der empfohlenen, werden zu können, da der Meßtiſch, in Verbindung mit den, von mir bis zu Secunden berechneten Sehnentafeln, und bey der zugleich vorgeſchlagenen Einrichtung deſſelben, auch bequem als bloßes Winkelmeß-Inſtrument, gebraucht werden kann.

Bis dahin bediente ich mich, des, allen Mechanicis ſehr gut bekannten Maroniſchen und Mayeriſchen Meßtiſches, mit der größeſten Zufriedenheit, beſonders des letztern, nachdem ich mir ſolchen zur Verlegung des Operationspunctes, in die Mitte des Tiſches, hatte einrichten laſſen; und ſeit dieſer Zeit, ſcheint mir ſolcher faſt unverbeſſerlich zu ſeyn, wenn man beſonders noch — was ich that — zur Erhöhung der Tragbarkeit, hochkanticht liegende, auf die Meſſing-Platte eines guten Stativs befeſtigte 6 — 8 Zoll lange meſſingene Arme, mit durchgehenden Schrauben gleichen Metalles, Statt der hölzernen Arme und Schrauben

wählt. Ohne Bedenken würde ich daher auch dieſen Meßtiſch hier empfohlen haben, wenn mir nicht im vorigen Jahre, die dieſe Jubil. Meſſe im Buchhandel erſchienene: „Beyträge zur Beförderung geometriſcher und geographiſcher Meſſungen“ des Herrn Hofrath Tabor, zu Geſicht gekommen wären; in welchen ich, die vorgeſchlagenen Meßtiſche, was deren Bau in Rückſicht des Holzes betrifft, als äußerſt brauchbar erprobt, empfohlen gefunden hätte; und zwar, was zu derſelben Empfehlung kein unbedeutender Mitveranlaſſungs-Grund wurde, mit Bemerkung eines ſo äußerſt geringen Preiſes, — von 9½ Fl. — welchen die Koſten des Mayeriſchen mehr als noch einmal überſteigen. Da das Einebnen der Stationspuncte, beſonders in ſteinigten, gebirgichten ꝛc. Terrain, ſehr mühſam, und überhaupt ſehr zeitzerſplitternd iſt; ſo habe ich, um Herrn H. Tabors Stellkreutz, zum Horizontalſtellen, zu erſparen, mit den Stativbenennungen, die in den Zeichnungen erſichtliche Veränderung, welche nach höchſter Wahrſcheinlichkeit ſehr nützlich ſeyn dürfte, angegeben. Denjenigen, welche nur wenige Thaler anwenden können und wollen, em-

pfehle ich daher den Meßtiſch Tab. II. Nr. 21. Den vermögendern Geometern aber obigen, des verdienſtvollen Herrn Hofrath Mayer, in Göttingen, (welcher jedem Mechanico bekannt iſt) und zwar mit den von mir bemerkten Verbeſſerungen. Der Meßtiſch No. 15 ob. Tab. kann ſelbſt vor dem letztern, noch Vorzüge haben, wenn die große Entfernung der Stativ-Beine vom Mittelpuncte, nicht zu viel Elaſticität, und das Aufliegen der Tiſchplatte, nicht zu viel Reibung verurſachte, oder ſich ſolche doch heben laſſen. Noch muß ich erwähnen, daß auch Herr H. Tabor die Operationsmethode aus dem Mittelpuncte beym Gebrauche des Meßtiſches, auf welche ich theils durch Zufall, vorzüglich aber durch Herrn Conrector Voigt, „neueſte Verſuche zur Erleichterung der practiſchen Geometrie", hingeführt wurde, als die practiſch nützlichſte, auf dieſelbe Art ausgeübt und bewährt gefunden habe; ſie iſt zugleich mit ſo äußerſt einfacher Manipulation verbunden, daß ſolche den entſcheidendſten Vorzug vor der gewöhnlichen verdient, welche ich demohngeachtet zugleich mit zeigen zu müſſen,

glaubte. Hoffentlich werden Sachkundige meine detaillirte Anleitung, mit bloßer Kette und Stäben, Acker und Wieſenſtücke ohne ſolche vorher aufzutragen, auf der Stelle ſo gleich einzutheilen ꝛc. aus dem Geſichts⸗puncte beurtheilen, „daß dieſes Buch auch für Nichtwiſſenſchaftlich gebildete, vielleicht nicht weiter fortſtudieren wollende und kön⸗nende Subjecte" beſtimmt ſey; zu detaillirt dieſen Lehrlingen etwas auseinander ſetzen zu können, möchte in der Regel wohl unmög⸗lich fallen. *)

Ueber geometriſche Zeichnungen, hätte ich gern mehreren Unterricht, und noch in⸗ſtructiver, Schemata mitgetheilt; allein den Preis des Buchs noch mehr zu erhöhen, glaubte ich bey denjenigen, welchen dieſe ſkizzirte Anleitung genügt, nicht zu entſchul⸗digen zu vermögen.

Einſichtsvolle Kunſtrichter, bitte ich nun um gütige Mittheilung derjenigen Bemer⸗

kun⸗

*) G. Groſſe, erſte Anfangsgründe der Feldmeßkunſt, Halle, 1798; Preis, 1 rthl. 12 gl. iſt in mehre⸗rer Rückſicht, vorzüglich aber der Deutlichkeit, zu empfehlen, und auch von mir zuweilen benutzt worden.

kungen, welche zur Vervollkommnung dieſes Buchs in Rückſicht einer weitern Bearbeitung deſſelben und auch zur Belehrung meiner ſelbſt, dienen könnten. Nachſichtsvolle und billige Critik, glaube ich deshalb erwarten zu dürfen, da das Bemühn, nützlich zu unterrichten, und mit den erforderlichen Vorkenntniſſen dieſe Schrift geſchrieben zu haben, nicht leicht ein Blatt derſelben, verkennen laſſen wird. Allerdings iſt dieſelbe noch mannigfaltiger Verbeſſerungen fähig, welche vorzüglich in dem Schwierigen der Bearbeitung ihres Gegenſtandes liegen; nur das Medium tenuere in Entſprechung des Zweckes, in Anſpruch nehmen zu dürfen, iſt das, was ich vom Publico zugeſtanden zu erhalten, wünſche.

Der Verfaſſer.

In=

Inhalt.

Theoretiſcher Theil. S. 1

Einleitung.

Erſter Abſchnitt. ebd.

1. Erklärung einiger arithmetiſcher Zeichen und Bezeichnungen ebd.

2. Kurzgefaßter Unterricht in der Bruchrechnung , , 6

a) Gemeine Bruchrechnung , ebd.

b) Decimal-Bruchrechnung , 26

3. Einiges über Potenzen und Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel , , , 49

4. Proportionsrechnung und zwar

a) Die Theorie des Unentbehrlichſten über Verhältniſſe und Proportionen 87

b) Die Anwendung dieſer Lehre für die Proportions-Rechnung ſelbſt , ebd.

5. Von den Progreſſionen , 97

A) Arithmetiſche Progreſſion , 99

B) Geometriſche — — , 106

6. Von den Logarithmen , 116

7. Praktiſche Ueberſicht der Silberſchlagiſchen vernunftmäßigen Rechenkunſt , , 182

Zweyter Abſchnitt. S. 190

Das Unentbehrlichſte aus der theoretiſchen Geometrie für die Meßkunſt . . ebd.

1. Allgemeine Begriffe und Erklärungen . . . ebd.
Longimetrie und Planimetrie . 194

2. Erklärungen von Linien, Flächen, Winkeln und Figuren ebd.

3. Folgerungen aus nähern Betrachtungen der Lage der geraden Linien gegen einander, und der ebenen Figuren . 204
A) Lehrſätze von Linien . ebd.
B) — — von Winkeln . 106
C) Erklärungen und Lehrſätze von Figuren . . 216
a) Ueber Congruenz der Dreyecke ebd.
b) Aehnlichkeit der Dreyecke und Figuren überhaupt . 242
c) Vergleichung des Flächen-Inhalts der Parallelogramme und Dreyecke . 285
d) Von Kreiſen und Vielecken 299

4. Anwendung der Arithmetik auf die bisher vorgetragenen geometriſchen Sätze . . 311
A) Meſſung der Linien . ebd.
B) — — der Winkel . 333
C) Meſſung und Berechnung des Flächengehalts der Figuren . 334

5. Verwandlung und Eintheilung der Figuren ſ S. 347
A) Verwandlung derſelben ſ ebd.
B) Eintheilung der Figuren ſ 354
Einige Begriffe und Lehren aus der Stereometrie ſ ſ ſ 373
Einige Begriffe, Lehrſätze und deren Anwendung aus der Trigonometrie ſ 382

Praktiſcher Theil.

Erſter Abſchnitt.

Praktiſche Vorbereitungs-Kenntniſſe zu geometriſchen Aufnahmen ſ ſ ſ 401
1. Einiges über das Studium dieſes Theils und die darüber vorhandenen vorzüglichen Quellen ebd.
2. Beſchreibung der unentbehrlichſten Inſtrumente und Hülfsmittel ſ ſ ſ 404
A) Zu Linienmeſſungen im Felde und auf dem Papiere ſ ebd.
B) Zu Winkelmeſſungen im Felde und auf dem Papiere ſ 412
3. Anleitung, Linien und Winkel ſowohl den Umſtänden entſprechend abzuſtecken, als auch zu meſſen ſ ſ ſ 427
A) Das Abſtecken und Meſſen der Linien in zugänglichen Lagen und zwar mit Kette und Stabe ſ ebd.
a) Linien abzuſtecken ſ ſ ebd.

b) Horizontalwinkel abzuſtecken . . . S. 433
und zwar
α) Mit Kette und Stäben . . . ebd.
β) Durch den Meßtiſch . . . 435
c) Zugängliche Linien und Winkel unmittelbar zu meſſen . . . 439
α) Meſſung der Linien . . . ebd.
β) — — der Winkel, und zwar . . . 442
aa) Durch Kette und Stäbe . . . ebd.
bb) Durch den Meßtiſch, und dieſes wieder . . . 443
αα) Durch den Gebrauch der Regel am Mittelpuncte des Meßtiſches . . . ebd.
ββ) Durch das gewöhnliche Fortlegen der Regel . . . 446
γγ) Das Centriren der Winkel . . . 448
cc) Meſſung der Höhen- und Tiefenwinkel . . . 452
B. Unzugängliche Weiten auch in der Entfernung zu meſſen . . . 454
a) Durch Kette und Stäbe . . . ebd.
b) Durch den Meßtiſch . . . 458

Zweyter Abſchnitt.
Von der geometriſchen Aufnahme ſelbſt

1. Unterricht, den Umfang jeder planimetriſchen Figur, ohne Berückſichtigung ihrer etwaigen innern Eintheilung ꝛc. aufzunehmen . . . 462
A) Aufnahme des Umfangs der Figuren mit Kette und Stäben . . . 468

B) Aufnahme des Umfangs mittelſt des Meßtiſches , , , S. 476
a) Aufnahme durch den Meßtiſch als Meßtiſch , , , 477
b) Aufnahme durch den Meßtiſch denſelben bloß als Winkelmeſſer betrachtet 488
2. Aufnahme der innern Eintheilung ꝛc. einer Figur, mit der Aufnahme des Umfangs derſelben verbunden , 491
A) Durch Kette und Stäbe , 491
B) Durch den Meßtiſch , 494

Dritter Abſchnitt.

1. Einige Anwendungen der vorgetragenen Lehren, auf Berichtigungsfälle, in Unordnung gerathener Ackerſtücke ꝛc. , 497
2. Einiges über das Zeichnen, Illuminiren und Copiren geometriſcher Riſſe , , 502

Anhang.

Einfache Reductions-Tafel für gemeſſene ſchräge und ſteile Berglinien, zur Beſtimmung, der ſolchen zugehörigen Horizontalen, und des Gefälles derſelben 511
Anleitung des Gebrauchs nachſtehender Sehnen-Tafeln , , , 520

Einlei-

Einleitung.

§. 1.

Durch den ſo bekannten Ausdruck Ding, kann jeder gedenkbare Gegenſtand bezeichnet werden. — Gleichartige Dinge ſind daher ſolche Gegenſtände, mit welchen man einen gemeinſchaftlichen Begriff verbinden kann; ungleichartige hingegen ſolche, welche keinen gemeinſchaftlichen Begriff haben.

§. 2.

Eine Menge von Dingen gleicher Art, nennt man eine Anzahl; in ſo fern nun ein Gegenſtand in eine Anzahl Theile zerlegbar gedacht wird, in ſo fern eignet man demſelben eine Größe zu.

Der Ausdruck Größe, umfaßt alſo alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt.

§. 3.

Die Größe eines Gegenſtandes, kann entweder durch bloß ſinnliche Vorſtellung derſelben, oder durch eine Vergleichung, welche

man zwiſchen ihr und einer andern bekannten Größe anſtellt, erforſcht werden.

Durch bloß ſinnliche Vorſtellung, z. B. durchs Anſchauen kann man die Kenntniß der Größen ſehr ſchnell und ohne viele Mühe aber nicht mit der oft erforderlichen Genauigkeit, erhalten. — Der Anblick einer Ruthe, Fußes ꝛc. gewährt ſogleich dem Begriff von ſeiner Größe ꝛc.

Durch Vergleichung wird die Größe gefunden, wenn man unterſucht,

„Wie vielmal eine andere gleicharti-
„ge Größe in der zu beurtheilenden, ent-
„halten ſey.“

Dieſe zur Vergleichung erforderliche Größe, nennt man nun das Maß, und das Verfahren ſelbſt, meſſen. Vergl. mit §. 169.

Iſt das Maß größer als das zu meſſende, ſo beſtimmt ein Theil des Maßes, die Größe deſſelben.

§. 4.

Die Größe der Gegenſtände unmittelbar meſſen, das heißt mit einem Maße, es ſey 1 Fuß, eine Schnur ꝛc. oder ſonſt etwas iſt ſo bekannt, als größtentheils leichte, hingegen die Entfernung zweyer ꝛc. Gegenſtände, auch ohne eine ſolche Meſſung, das heißt mittelbar, zu finden, dieſes erfordert gewiſſe Kenntniſſe, und ſezt Begriffe von Größen

voraus, aus welchen ſich eine Vergleichung durch Vernunftſchlüſſe, anſtellen läßt, welche nicht unmittelbar durch die Sinne empfunden werden.

Diejenige Wiſſenſchaft nun, welche ſich mit „Ausmeſſung und Beſtimmung der Grö„ßen überhaupt und dergeſtalt beſchäftigt, „daß aus einigen bekannten Größen, die „zu findenden unbekannten durch Schlüſſe „gefunden werden," heißt

Mathematik;

ſie wird auch die Größenlehre genannt.

Das Wort, Mathematik, iſt griechiſchen Urſprunges, und heißt eigentlich an ſich, Wiſſenſchaft. —

§. 5.

Die Größen können betrachtet werden,

1. entweder von allen Eigenſchaften abgeſondert, das heißt, „bloß als Größen — z. E. die Zahlen 1, 2, 3, — ohne darauf zu ſehen, ob ſolche Ruthen, Fuße, Pfunde ꝛc. ſind." — Dieſes heißt Größen in abſtracto betrachtet;
2. Oder man ſieht zugleich auf die Eigenſchaften mit. — Dann betrachtet man die Größen in concreto. —

Betrachtet man die Größen zwar im Allgemeinen in abſtracto, allein bloß als eine Menge von Theilen, als ein Ganzes, ſo

nennt man ſolche auch unſtäte, unterbrochene, diſcrete Größen, ſieht man aber zugleich auf die Verbindung der Theile und ihre Ordnung, welche etwas Zuſammengeſetztes ausmachen; ſo heißen ſolche ſtäte, continuirliche Größen.

§. 6.

Da nun die Mathematik als Größenlehre, die Größen zwiefach betrachten kann, ſo zerfällt ſolche dadurch ſchon an ſich in zwey Haupttheile, welche

I. die reine } Mathematik, genannt
II. die angewandte }

werden.

Die Größen in erſterer Rückſicht — in abſtracto — betrachtet, ſind Gegenſtände der reinen, in der letztern Rückſicht — in concreto — betrachtet, aber Gegenſtände der angewandten Mathematik.

— Oft wird man in mathematiſchen Schriften die Ausdrücke, „extenſive und intenſive Größen leſen.“ — Größen der erſtern Art, ſind ſolche, wo die Theile nebeneinander fallen. Z. E. bey Linien, Flächen ꝛc.

Größen der zweyten Art aber die, wo jene ineinander fallen; z. E. die Grade der Wärme, des Feuers ꝛc.

§. 7.

I. Die reine Mathematik,

zerfällt nach den verſchiedenen Geſichtspunkten, aus welchen die Größen blos als Größen betrachtet werden,

1. in die Arithmetik,

auch Rechenkunſt, genannt; welche unſtäte Größen zum Gegenſtande hat, ſich mit den Formen und Verknüpfungen der Zahlen, ſo wie den daraus herzuleitenden Auffindungen des Unbekannten, beſchäftigt.

2. in die Geometrie,

auch Meßkunſt im weiteſten Sinne; — deren Gegenſtände ſtäte, continuirliche Größen ſind.

Dieſe beyden Theile der reinen Mathematik, zerfallen nun wieder jeder in 2 Unterabtheilungen;

in die niedere und in die höhere	Arithmetik und Geometrie

Angemeſſen iſt folgende Eintheilung, und wie ſolche überhaupt in der angeführten Tafel entworfen erſcheint, worauf ich den Leſer dieſer Einleitung einmal für allemal hingewieſen haben will. —

§. 8.

Die Arithmetik kann man nemlich eintheilen,

a. in die gemeine oder Zahlen- und

b. in die allgemeine oder Buchſtaben-Rechenkunſt.

Im Ganzen haben beyde einerley Gegenſtand und Begriff, nur daß die leichtern Fälle für die erſtere, die verwickeltern für die letztere gehören; welche ſich noch außerdem ſtatt der gewöhnlichen Zahlen der kleinen lateiniſchen Buchſtaben, als allgemeiner Zeichen, bedient. Ein Theil dieſer allgemeinen Arithmetik, erhält häufig noch den beſondern Namen,

Die Buchſtaben-Rechenkunſt im engſten Sinne — denn da die allgemeine Arithmetik ſich überhaupt der Buchſtaben bedient, ſo kann auch dieſe unter demſelben Ausdruck aber im weiteſten Sinne, verſtanden werden. —

Im engſten Sinne genommen, umfaßt ſolche nemlich:

1. Die vier Rechnungsarten mit Buchſtaben, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion.
2. Die Lehre von den Potenzen.
3. Die Lehre von den Proportionen.
4. Die Lehre von den Logarithmen.

Man kann die allgemeine Arithmetik daher dann füglich eintheilen,

aa. in die Buchſtaben-Rechenkunſt, im engſten Sinne.

bb. In die Buchſtaben-Rechenkunſt, im weitern Sinne, auch Algebra genannt, und mit Inbegriff einer gewiſſen Lehre, der Functionen, Analyſis (Auflöſungskunſt) des Endlichen; —

cc. In die Buchſtaben-Rechenkunſt im weiteſten Sinne — Analyſis des Unendlichen — welche letztere wieder in die Differenzial- und Integral-Rechnung zerfällt.

Allein, ſelbſt nicht einmal eine Worterklärung dieſer arithmetiſchen Theile, würde den Leſern dieſer Schrift verſtändlich werden; daher ſolche wegbleiben; bey fortgeſetztem mathematiſchen Studio, wird es demſelben nicht an Gelegenheit und Kräften fehlen, dieſe und mehrere ähnliche Lücken auszufüllen und ihre Wißbegierde zu befriedigen.

§. 9.

Die Geometrie zerfiel nach dem Vorhergehenden in die Niedere und Höhere.

Die erſtere beſchäftigt ſich mit graden Linien, Kreiſen, und denen durch ſolche entſtehenden Flächen und Körpern; und zerfällt in die Longimetrie, Planimetrie, und Stereometrie; mit welchen wir uns hier

in der Folge beſchäftigen werden. Die Letztere aber mit den ſogenannten Kegelſchnitten und andern krummen Linien. Die Kegelſchnitte, ſind die wichtigſten; es ſind nemlich Linien, welche ſich bilden, wenn man einen kegelförmigen Körper, beſſer aber noch, eine ſpitze runde Pyramide, nach verſchiedenen Richtungen durchſchneidet oder ſich durchſchnitten denket. — Die vorzüglichſten dieſer Linien ſind; die Parabel, Ellipſe und Hyperbel.

Der ungemeine Nutzen, welchen gewiſſe Grundſätze und Lehren über die Dreyecke in der niedern Geometrie haben; veranlaßte gleichſam einen beſonderen Theil, welcher allgemein den Namen die Trigonometrie, erhalten hat; ſie lehrt nemlich, „zu drey „bekannten Stücken eines Dreyecks, worunter „wenigſtens eine Seite ſeyn muß, die übrigen fehlenden Stücke durch Rechnung zu finden.“ Vor allen mathematiſchen Theilen, hat ſolche ſicher den ausgebreiteſten Nutzen in der ganzen Mathematik.

Selbſt derjenige, welcher auch nur auf den Namen des mittelmäßigſten Geometers Anſpruch machen will, kann die erſten Vorkenntniſſe derſelben durchaus nicht entbehren.

Nachdem nun die Dreyecke, mit welchen dieſe Lehre ſich beſchäftigt, gradlinichte oder

krummlinichte (ſphäriſche) ſind; ſo wird ſol-
che auch

in die ebene und ſphäriſche Trigonometrie eingetheilt.

Unter dem Ausdrucke, „der höhern Mathematik,“ verſteht und bezeichnet man gewöhnlich die Analyſis und deren Anwendung. Durch die Anwendung der Analyſen auf Geometrie und Trigonometrie, bildeten ſich wieder zwey beſondere Theile,

1. Die analytiſche Geometrie und
2. die analytiſche Trigonometrie.

§. 10.

II. Die angewandte Mathematik

läßt ſich füglich eintheilen:

1. in die angewandte phyſiſche,
2. in die angewandte techniſche Mathematik.

§. 11.

1. Die angewandte phyſiſche Mathematik,

enthält

a. Die Dynamik, welche von den Kräften der Körper überhaupt, handelt; in Berückſichtigung ihrer Anwendung auf unelaſtiſch oder elaſtiſch flüſſige Körper, entſteht dann noch die ſogenannte Hydrodynamik und Aerodynamik.

Als beſondere Theile der Dynamik, welche eigene Namen erhalten haben, ergeben ſich folgende Wiſſenſchaften:

aa. Die Statik, welche die Geſetze der feſten Körper unterſucht, unter welchen ſie ein Gleichgewicht bewürken. In Rückſicht der flüſſigen Körper, bildet ſich dadurch die ſogenannte Hydroſtatik.

bb. Die Mechanik. Sie betrachtet die Kräfte der Körper.

aaa. Die Hydraulik unterſucht dieſes in Rückſicht der flüſſigen Körper.

bbb. Die Aerometrie handelt von den Geſetzen des Gleichgewichts flüſſiger elaſtiſcher Körper; die Aeromechanik aber von den Kräften dieſer Körper in der Bewegung.

ccc. Die Geſchützwiſſenſchaft, beſonders die Artillerie; ſie lehrt die Wirkung des Pulvers auf die Geſchützkugeln berechnen; und die Bahn ſolcher Kugeln nach ihrer Geſtalt und Größe zeichnen und ausmeſſen.

ddd. Die Taktik oder Stellungskunſt giebt die Stellungen oder Bewegungen der Truppen ꝛc. an.

eee. Die Lagerwiſſenſchaft, ein Lager einzurichten ꝛc.

b. Die Optik; ſie enthält die auf das Licht angewandten Lehren der Mathe-

matik, und zerfällt in folgende Abtheilungen: als

aa. Die beſondere Optik, welche von den geraden Lichtſtrahlen handelt. Einen Theil derſelben macht die ſogenannte Perſpectiv aus, welche die Gegenſtände ſo zeichnen lehrt, wie ihr Bild ſich bey einem feſt angenommenen Puncte des Auges, nach den aus ſolchem ausgehenden Sehſtrahlen, darſtellt.

bb. Die Catoptrik enthält die Lehren über das von den Spiegeln zurückgeworfene; und

cc. Die Dioptrik; die Lehren über das in durchſichtigen Materien gebrochene Licht.

c. Die Aſtronomie enthält die Lehren von der Größe, Bewegung und Entfernung der himmliſchen Weltkörper, und zerfällt in folgende Abſchnitte: als

aa. In die ſphäriſche; welche alle diejenigen Erſcheinungen der Himmelskörper zum Gegenſtande hat, welche bloß durch die Kugelähnliche Anſicht des Schöpfungs-Raumes, ſich darbieten.

bb. In die theoriſche Aſtronomie, was man aus Beobachtungen durch den Verſtand erkennen, durch vernunftmäßige

Betrachtungen als in jenem Weltraume vorgehend, vermuthen kann. — Die theoretiſche Aſtronomie iſt von dieſer verſchieden, und nicht mit ſolcher zu verwechſeln; dieſe hat bloß mit aſtronomiſchen Unterſuchungen zu thun; ſie iſt der practiſchen entgegengeſetzt, welche wirklichen Gebrauch von dieſen Unterſuchungen macht.

Wiſſenſchaften, welche ſich auf die Aſtronomie gründen und von ihr abhängen, ſind

α. die Mathematiſche Geographie, welche die Geſtalt und Größe unſerer Erdkugel betrachtet, und was an derſelben auszumeſſen iſt.

β. Die mathematiſche Chronologie; Zeitabtheilung nach den Erſcheinungen am Himmel; in Jahre ꝛc.

γ. Gnomonik, die Wiſſenſchaft, die Zeit, durch Benutzung des Sonnenſchattens, in kleinere Theile zu theilen, in Stunden ꝛc. überhaupt Sonnen-Uhren zu verfertigen.

§. 12.

2. Die angewandte techniſche Mathematik,

umfaßt nun wieder folgende Wiſſenſchaften:

a. Die practiſche Mechanik — Anwen-

dung und Ausübung der in dem vorhergehenden Paragraphe aufgeſtellten Lehren dieſer Wiſſenſchaft.

b. Die practiſche Geometrie — Anwendung der theoretiſchen Grundſätze der Geometrie, in Verbindung mit andern mathematiſchen und phyſikaliſchen Lehren: ſie zerfällt

aa. in die Landesvermeſſungskunſt — wie die Charte eines Landes mit der Lage der verſchiedenen Theile und genau zu beſtimmender Größe deſſelben, richtig verfertigt werden kann; — topographiſche Vermeſſungen. —

bb. militairiſche Planaufnahme; militairiſche Feldmeßkunſt. Die Lage der Hauptpuncte einer Gegend, von Ortſchaften, Bergen, Thälern, Flüſſen, Hohlungen, mit ihren Nebentheilen ꝛc. bloß durch Schritte, höchſtens mit Beyhülfe der Meßkette und einfacher Winkelmeßinſtrumente zu beſtimmen. Uebung und gutes Augenmaß, thun dabey vorzügliche Dienſte.

c. Die ſogenannte Feld- oder Landmeßkunſt im engern Sinne, welche Vermeſſung der Fluren und einzelnen Grundſtücke über-

haupt, zum Gegenſtande hat; und in ſo fern alſo die Vermeſſung der Waldungen ꝛc. mit umfaßt. Die erſten Anfangsgründe derſelben, werden in dieſem Buche gelehrt werden.

c. Das Nivelliren oder Waſſerabwiegen; — die Beſtimmung des Gefälles zweyer oder mehrerer Puncte gegeneinander.

d. Bauwiſſenſchaften; — dieſe leiden folgende Abtheilungen

aa. in bürgerliche oder Civil-Bauwiſſenſchaften, im weitern Sinne. Gegenſtände derſelben ſind alle Baue ohne Ausnahme welche nicht in militäriſcher Rückſicht aufgeführt werden. Hiernach zerfallen ſolche, nachdem dieſelben Land- oder Waſſerbaue betreffen,

aaa. in Waſſerbau und

bbb. — Landbauwiſſenſchaften.

Haupttheile des Waſſerbaues ſind:

α. der Wehr-,

β. — Schleuſen-,

γ. — Teich und Dammbau;

δ. — Brückenbau,

ε. der Mühlenbau.

Der Teich- und Dammbau, beſorgt die zweckmäßige Anlage der Ufer und Dämme zur Zügelung des Waſſers bey Seen, Strömen, Teichen, und allen Anlagen von Waſſerbehältern.

Haupttheile des Landbaues ſind:

α. Die Landwirthſchaftliche Bauwiſſenſchaft — Gegenſtände ſind hier natürlich alle Gebäude, welche der Landwirth zu ſeinen verſchiedenen öconomiſchen Zwecken bedarf.

β. Straßenbauwiſſenſchaften; Straßen bequem und dauerhaft über jedes Terrain zu führen.

γ. Cameraliſtiſche Bauwiſſenſchaften; — welche theils die beyden erſtern mit in ſich faſſen, theils ſich beſonders auf Gebäude der Manufakturen und Fabriken erſtrecken; theils die Grundlehren der nachfolgenden Bauwiſſenſchaften an ſich knüpfen.

δ. Bergbau — Graben gegen den Einſturz gehörig auszubauen; Maſchinen zur Förderung des Waſſers, des Bergs, und der Erze anzulegen ꝛc.

ε. Civilbaukunſt oder bürgerliche Baukunſt im engern Sinne — auch Stadtbaukunſt, genannt. Ihre Gegenſtände ſind alle gewöhnlichen Wohngebäude des Stadtprivatmannes.

ζ. Gartenbaukunſt, — Gärten nach verſchiedenem Geſchmacke mehrerer Nationen im Ganzen oder einzelnen Theilen, anzulegen; z. B. ein Park, Auen ꝛc.

ι. Prachtbaukunſt, ſchöne oder höhere Baukunſt — die Wiſſenſchaft, große Prachtgebäude aller Gattungen, als Schlöſſer, Paläſte, Monumente ꝛc. zu errichten

bb. Kriegesbauwiſſenſchaften; — ſie enthalten aaa. Die Feſtungsbauwiſſenſchaften.

bbb. Die Verſchanzungsbauwiſſenſchaften.

e. Die Markſcheidekunſt — die Führung der ſogenannten Straßen oder Gänge, die Stollen ꝛc. zu beſorgen; ſie enthält zugleich die Anwendung der ſogenannten unterirdiſchen Geometrie.

f. Die politiſche Arithmetik, auch Wahrſcheinlichkeits-Rechenswiſſenſchaft — z. E. Berechnung der Sterblichkeit der

Bürger eines Staates; der Dauer der Sterbecaſſen, Witwencaſſen, Lotto ꝛc.

g. Die Wiſſenſchaft des Seeweſens — ſie betrifft ſowohl den eigentlichen Bau, als den Mechanismus der Regierung des Schiffs und ſeiner Führung durch bekannte und unbekannte Gewäſſer.

§. 13.

Eine jede Wiſſenſchaft, welche mündlich der ſchriftlich gelehrt wird, muß nach einer gewiſſen Ordnung vorgetragen werden; und dieſe Ordnung nennt man überhaupt die Lehrart.

In dem mathematiſchen Lehrvortrage, werden zuerſt Erklärungen über die vorkommenden zu erläuternden Gegenſtändegegeben; das heißt, gezeigt, in welchem Sinne ſolche genommen werden.

Worterklärungen, heißen ſolche dann, wenn die angezeigten Merkmale der Sache, dieſelbe vollkommen von allen andern unterſcheiden.

Sacherklärungen, aber, wenn jene Merkmale zugleich angeben oder die Erklärung zeigt, wie eine Sache möglich ſey.

§. 14.

In der Mathematik, kommen auch ſogenannte theoretiſche und practiſche Sätze vor, welche aus den Erklärungen abgelei-

tet werden, und völlig einleuchtende Wahrheiten enthalten müſſen. —

Die erſtern Sätze zeigen bloß an, daß eine Sache ſo und nicht anders ſey; die letztern aber, daß etwas zu Stande gebracht werden ſoll.

Jene nennt man noch beſonders, Grundſätze, Axiome, dieſe aber Forderungsſätze, Poſtulate.

Sätze, deren Wahrheiten nicht ſo gleich überzeugend einleuchten, ſondern erſt aufgeſucht werden müſſen, heißen Lehrſätze, Theoreme; und die Aufſtellung der Gründe, welche die Wahrheit des Satzes ergeben, der Beweis — Lehrſätze ſind alſo theoretiſche Sätze. — Practiſche Sätze, in welchem die Forderung nicht ſogleich entwickelt liegt, ſondern noch erfüllt werden muß, heißen Aufgaben, Probleme.

Der Inbegriff der Regeln des Verfahrens das Geſuchte zu finden, heißt die Auflöſung.

§. 15.

Sätze, welche aus einem kurz vorhergehenden Lehrſatze leicht gefolgert werden können, heißen Zuſätze, Corollaria. Scholien, Anmerkungen, werden diejenigen Sätze genannt, welche nur beyläufige Erläuterungen und Notizen enthalten.

Druck-

Druckfehler und Verbeſſerungen.

Pag.	Zeilen oben	unt.	anſtatt	leſe man
4	—	6	Müſſen die Buchſtab. S.. einerlei Größe hab.	!
ebd.	—	5	ſ = 12 ꞉	S = 12
51	23	-	$..\frac{4^2}{9^2}\Big\|\frac{9^2}{16^2}\Big\|\frac{8^3}{25^3}$ ꞉	$..\frac{2^2}{3^2}\Big\|\frac{3^2}{4^2}\Big\|\frac{2^3}{5^3}$
52	1	-	Potenzzahlen ꞉	Wurzelzahlen !
56	15	-	die geſ. Wurzel ꝛc.	3. d. geſ Wurz.
71	—	2	—꞉ —꞉:	: als Zeich. d. geometr. Verhält.
103	11	-	Antwort, 126 mal;	Antw. 198 mal
108	9	-	Einheiten ꞉ ꞉ ꞉	Einheiten + 1
118	—	6	Kennzziffer ꞉ ꞉	Kennziffer
148	—	6 7	ſtehn 100 u. 110 Pfund, auf d. entgegengeſ. Seit.	1500 C. 20 C. 100 ℔ 1 C. 1 C. 110 ℔ u. ſ. w.
149 50	6,18 20,2,4,		Sind nach d. Aufgabe leicht zu berichtigen.	Fac. 1491 $\frac{2}{4}\frac{1}{4}$ rth das Facit wird dann 128 $\frac{6}{7}$ rth.
168	12	-	Anſatz, 10000 rth.	nach d. Aufgabe 6000 rth.
168	14	-	Facit 818 rth.	Fac. 491 $\frac{1}{4}\frac{9}{0}\frac{3}{7}$ rth.
169	15	-	Facit 54482 $\frac{2}{2}\frac{2}{9}$ rth.	Fac. 57931 $\frac{1}{2}\frac{1}{9}$ rth
170	11	-	denn $\frac{9}{84}\frac{88}{84}\Big\}$ od. $\frac{9}{*}$ (84) | 88 9 (84)	$\frac{9}{84}\Big\|\frac{84}{84}\Big\}$ od. $\frac{9}{*}\Big\|\frac{84}{84}$
188	17	-	Facit 44 $\frac{8}{15}$ ꞉ ꞉	Facit. 328 $\frac{8}{9}$
189	2	-	Wie viel 2266 ℔ ?	2278 ℔ ?
196	—	4	Iſt hinter „Fläche, einzuſchalten, „von einem Winkelpunkte zum andern.	

Pag.	Zeil. von ob.	unt.	anſtatt,	leſe man
197	13	. .	.... bg	.... bf
198	3	. .	...nemlich <	.... nemlich ∟ Not. Aller Orten, wo nicht erſichtlich durch das Zeichen <, eine Vergleichung od. der Ausdruck des Grӧſſern od. Kleinern 2er Grӧßen, hat angedeutet werden ſollen, iſt <, mit dem ∟, zu verwechſeln.
204	5	. .	Centerwinkel . . .	Centriwinkel.
205	.	6	∟ acd	∟ adc
215	5	. .	Iſt hinter bc und ea zu ſuppliren, „weil ſolche Winkel nach „pag 232 Nr. 3, zwiſchen „Parallelen, gleich ſind.“	
221	.	. .	§. 24. in der 3ten Zeile hinter alſo, iſt Fig. 17. einzuſchalten.	
223	.	7	∟ adc = ∟ bdc .	∟ acd = ∟ bcd
		8	Folgerungen aus §. 114.	Folgerungen aus §. 122.
			∟ adc = ∟ bdc = R.	∟ acd = ∟ bcd = R
248	.	7	(Dg)	(BC)
ebd.	.	10	— —	— —
253	.	14	§. 133.	§. 137.
	.	11	AC	AB
256	.	5	großen Linie . . .	geraden Linie
265	.	5	A : Am = AB : AC .	AJ : Am = AB : AC
270	.	4	Fig. 27.	Fig. 30.
280	.	10	△A	∟ A
288	6	. .	abcd : afce = af : ab .	abcd : afce = ab : af
291	.	3	abcd:begf=ac:ab:gb:be	abcd:begf=ac.ab:gb.be
296	.	3	Fig. 40, $A^{q} = AB^{q} + BC^{q}$	Fig. 40, $AC^{q} = AB^{q} + BC^{q}$
301 302	6	6	.... ; dcf	.... : dcb

Pag.	Zeil. von ob.	unt.	Anſtatt,	leſe man
303	.	11	Fig. 41.	Fig. 42.
304	5	. .	Fig. 42.	Fig. 43.
305	.	4	Fig. 43.	Fig. 44.
306	.	. .	Statt des ſub Nr. 2. ſtehenden Beweiſes, „daß $\llcorner ABC = R$ . .	$ABE + EBC = ABC$ $2\,ABE = p$ $2\,EBC = q$ $p + q = 2R$ $ABE + EBC = ABC = R$
310	9	. .	erhabenes	erhabener
331	.	8	1 Zoll	1 Fuß
337	3	. .	Fig. 37.	Fig. 47.
339	.	7, 12	a b und a c . . . a b und b c . . .	a b und c d a b und c d
359	.	. .	Unter b, in der 3ten Zeile, iſt Fig. 63. einzuſchalten.	
362	.	2	Desgleichen nach a b f g, Fig. 67.	
363	5	. .	$125^{\circ}\,5''\,5'''$ . . .	$12^{\circ}\,5'\,5''$
370		6	Fig. 11. . . . Fig. 71. . . .	Fig. 71. Fig. 70.

Theo-

Theoretiſcher Theil.

I. Abſchnitt.

1. Erklärung einiger arithmetiſcher Zeichen und Bezeichnungen.

§. 1.

Jede Wiſſenſchaft, ja jede Kunſt, hat ihre eigene Sprache, Ausdrücke und Zeichen; vorzüglich aber die Mathematik in allen ihren Theilen —; alſo auch in der Arithmetik und Meßkunſt.

Dieſe Sprache und Zeichen muß man ſich geläufig bekannt machen; ſie gewähren Kürze des Ausdrucks und leichtere Ueberſicht der verwickeltern Sätze.

Für den Zweck dieſer Schrift, ſcheint mir die Kenntniß von Folgendem zureichend zu ſeyn.

a. Die Buchſtaben des kleinen lateiniſchen Alphabets werden oft Statt der Zahlen gebraucht. — Die drey letztern Buchſtaben, x, y, z. be-

zeichnen gewöhnlich die zu findenden unbe=kannten hingegen a, b, c . . . . w, die gegebenen bekannten Größen.

b. Das Zeichen der Addition iſt + (genannt plus auf Deutſch mehr.)

c. Das Zeichen der Subtraction iſt ÷, oder bloß —, (genannt minus auf Deutſch weniger).

d. Das Zeichen der Multiplication, ein liegendes ×, oder ein bloßer Punct. (.)

e. Das Zeichen der Diviſion, :, oder ein Queerſtrich zwiſchen zwey Größen; z. B. 6:3, oder $\frac{6}{3}$.

f. Das Zeichen der Gleichheit, zwey gleich=laufende Striche, =.

g. Das Zeichen der Wurzelausziehung, $\sqrt{}$; ſteht oben in der Oeffnung keine Zahl, oder die Zahl 2, z. B. $\sqrt{}$, $\sqrt[2]{}$, — ſo ſoll die Auszie=hung der Quadratwurzel, ſteht die Zahl 3, daſelbſt, z. B. $\sqrt[3]{}$ — die Ausziehung der Cu=bikwurzel, dadurch angedeutet werden ꝛc.

h. Zur Bezeichnung der größern oder kleinern Größe, ein liegendes latein. V; — > — die Oeffnung gegen die größere, die Spitze gegen die kleinere gerichtet. z. B. 4 > 2.

i. Das Einſchlußzeichen, oder Parentheſe ( ), in welches zuſammengeſetzte Größen einge=ſchloſſen werden.

§. 2.

Gebrauch dieſer Zeichen.

Sind Größen zu addiren oder zu ſubtrahiren, ſo wird das Zeichen +, ÷ oder —, zwiſchen ſolche geſtellt

Z. B. 3 zu 4, oder a zu b } = 3 + 4, od. a + b

3 von 4, od. a von b } = 4 — . 3 od. b — a, ꝛc.

Bey dem Multipliciren und Dividiren der Größen, wie folgende Beyſpiele lehren:

3 mit 4, od. a mit b } 3 × 4, 3 . 4; a × b, a . b } multipl.

6 durch 3, od. a durch. b } 6 : 3, $\frac{6}{3}$; a : b, $\frac{a}{b}$ } dividirt.

§. 3.

Zuſammengeſetzt, heißt diejenige Größe, welche aus mehrern, durch obige Zeichen verbundenen Theilen beſteht.

Z. B. 4 + 3 — 2, oder a + b — c ꝛc.

Soll nun eine Größe — auch einfache Größe im Gegenſatze genannt — viele andere oder zuſammengeſetzte Größen, auf einmal multipliciren oder dividiren, (oder auch zuſammengeſetzte, andere zuſammengeſetzte Größen —) ſo ſchließt man die zuſammengehörigen in Parentheſe, und ſtellt die übrigen mit den bekannten Zeichen, nach Anleitung folgenden Beyſpieles:

$$\left.\begin{array}{l} a+b-c \text{ mit } a \\ 3+4-1 \text{ mit } 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =(a+b-c)\times a \\ =(3+4-1)\times 3 \end{array} \Bigg\} \text{ multipl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b-c \text{ durch } a \\ 3+4-1 \text{ durch } 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a+b-c):a;\dfrac{(a+b-c)}{a} \\ (3+4-1):3;\dfrac{(3+4-1)}{3} \end{array} \Bigg\} \text{ div.}$$

oder:

$$a+b-c, \text{ durch } a-c+d-e, = \frac{(a+b-c)}{(a-c+d-e)} \Big\} \text{ od.}$$

$$(a+b-c):(a-c+d-e)$$

— In der Multiplication, läßt man den Punct und das Kreuz gewöhnlich weg; als $(a+b-c)\,(a-c+d-e)$ —

Oft ſind Größen 2.3.... mal eingeſchloſſen; in dieſem Falle fängt man bey der Auflöſung dieſes, Formel, genannten Ausdrucks, von der innerſten zur Rechten ſtehenden Parentheſe, zu entwickeln an, und geht dann Stufenweiſe nach der Ordnung, wie ſolche zur Linken folgen, fort.

Die Auflöſung nachſtehender in der Berechnung der Dreyecke ſo wichtigen und nüzlichen Formel, wird ſolches deutlich machen.

$$\text{Formel} = \left(S\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\right)$$

Es werde angenommen, daß $ſ = 12$

$a = 6$

$b = 3$

$c = 2$

Die Auflöſung beginnt bey * . Als S — c = 12 — 2 = 10 ; dieſes ſoll mit S — b, welches = 12 — 3 = 9, multiplicirt werden; alſo 10 × 9 = 90. Dieſes Product wieder mit S — a, oder 12 — 6, folglich 90 × 6 = 540; und dieſe Zahl ferner mit dem vorſtehenden S = 12, mithin 540 × 12 = 6480.

Unter ſolchen, für die Buchſtaben hier angenommenen Werthen, wäre

$\left(S(s-a)(s-b)(s-c)\right)$ aufgelößt = 6480.

Anmerk. Die Entwickelung dieſer Formel, ſuche ſich der Lernende ganz geläufig zu machen; nehme bald dieſe bald jene Zahl für S, a, b, c, an ꝛc. — er wird dadurch mit dieſer ſo nützlichen und in der practiſchen Geometrie ſo ſehr abkürzenden Sprache vertraut, und vertilgt unbemerkt auch bey ſich das ſo allgemeine Vorurtheil, „daß der Ausdruck durch ſolche Zeichen, ſchwer und unverſtändlich ſey.“

2. Kurzgefaßter Unterricht in der Bruchrechnung.

a. Gemeine Bruchrechnung.

§. 4

Der Ausdruck Bruch, läßt ſich von dem Zerbrechen irgend eines Ganzen in Stücke, ableitend erklären; jedes Stück des zerbrochenen Ganzen, kann man Bruchſtück nennen; und alle dieſe Stücke zuſammengenommen, ſind natürlich dem Ganzen ſelbſt, gleich.— Bruch, im eigentlichen Sinne, drückt alſo bloß Theile des Ganzen aus. — Die Darſtellung der Brüche geſchieht durch die Uebereinanderſtellung gewiſſer, durch einen Queerſtrich getrennter Zahlen; von denen die oberhalb des Strichs, der Zähler, die unterhalb, der Nenner genannt werden. Z. B.

$\frac{6}{7}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$ | $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ }

§. 5.

Die Bequemlichkeit im Rechnen erfordert, daß auch Ganze in Bruchform ausgedrückt werden. — So kommen auch Brüche vor, welche Ganze und Bruchtheile, vermiſcht oder zuſammen enthalten. — Dieſe nennt man überhaupt unächte Brüche. Das Kennzeichen derſelben iſt,

„wenn man den Zähler derſelben entweder gleich groß, oder noch größer als den Nenner, findet.

z. B. $\frac{6}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{9}{8}$ ꝛc.

Führt der Zähler oder auch zugleich der Nenner, noch Bruchtheilchen bey ſich, ſo heißt derſelbe Bruch, ein gebrochener, auch unreiner Bruch.

z. B $\frac{6\frac{1}{7}}{11}$, oder $\frac{9\frac{1}{4}}{10\frac{1}{3}}$, ꝛc.

§. 6.

Ganze Zahlen in beliebige Brüche, und Brüche in andere Brüche von gegebenem Nenner, zu verwandeln.

Für den erſten Fall unterſcheide man,
„ob die Ganzen bloß in Bruchgeſtalt, oder „zugleich mit einem gegebenen Nenner, darge„ſtellt werden ſollen“.

Für Jenes, ſetzt man dieſelbe Zahl, als Bruchszähler, und 1 zum Nenner. — Es ſollte z. B. 6, in einem Bruche ausgedrückt werden, = $\frac{6}{1}$. Wollte man 6 aber in Viertel (das heiſt, in einen Bruch, deſſen Nenner 4) verwandeln: ſo multiplicire die ganze Zahl mit dieſem vorgeſchriebenen Nenner = 24; das Product iſt der neue Zähler;

als, $6.4 = 24$, $\frac{24}{4}$.

Oder es ſey 8 in Dreyzehntel, oder 5 in Neuntel — zu verwandeln; $13.8 = 104$, $\frac{104}{13}$ ‖ $9.5 = 45$, $\frac{45}{9}$.

Die Probe der Richtigkeit des Ausdrucks, ergiebt die Diviſion des Nenners in dem neuen Zähler;

der Quotient muß die verwandelte ganze Zahl wieder herſtellen.

z. B. $\frac{104}{13} \Big| 8, \frac{45}{9} \Big| 5$, Probe.

Nach dieſem Vorausgeſchickten, wird es nun ſehr leicht ſeyn, „das Verfahren, Ganze mit Brüchen unter einen gemeinſchaftlichen Ausdruck zu bringen" ſelbſt auszumitteln;

z. B. $6\frac{1}{4}$ geben $\frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$; $9\frac{1}{7} = \frac{64}{7}$

Für den zweyten Fall,

„Brüche in Brüche von gegebnem Nenner „zu verwandeln";

muß der Zähler des zu verwandelnden Bruches, mit dem gegebenen Nenner multiplicirt, und das Product durch ſeinen Nenner dividirt werden; — Der Quotient wird der neue Zähler. Wie viel ſind z. B. $\frac{3}{4}$ Achtel?

$3 \cdot 8 = 24$, $\frac{24}{4} = 6$, $\frac{6}{8}$ welche $= \frac{3}{4}$.

Anmerk. Dieſe Verwandlung der Brüche iſt auch beſonders in Rückſicht desjenigen Nutzens, welchen die durch ſolche mögliche Vergleichung zweyer Brüche gewährt, äußerſt wichtig. —

Sollte die Verwandlung oder Vergleichung mit einem gebrochenen Bruche geſchehen, ſo müßte dieſer zuvor als ein reiner Bruch ausgedrückt ſeyn; dieß geſchieht, wenn der Zähler als ein Ganzes mit dem beyſtehenden Bruche behandelt und

eingerichtet, dann aber mit dem Nenner dieſes eingerichteten Bruchs, der Nenner des Hauptbruchs, multiplicirt wird. Folgendes Beyſpiel erläutert ſolches.

Es ſoll der unreine Bruch $\frac{3\frac{1}{4}}{5}$ in einen reinen Bruch verwandelt werden; alſo:

3·4 = 12, 12 + 1 = 13, d. neue Zähl $\Big\}\frac{13}{20} = \frac{3\frac{1}{4}}{5}$
5·4 = 20, der neue Nenner

§. 7.

Reducirung der Brüche.

Einen Bruch reduciren, heißt denſelben ohne Veränderung ſeines Werthes abgekürzt, möglichſt klein, darſtellen. Jedermann weiß, daß $\frac{2}{4}$ ſo viel als $\frac{1}{2}$ iſt —. Wenn nun dieſe $\frac{2}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ ausgedrückt ſind, ſo heißt es, es ſey $\frac{2}{4}$ auf $\frac{1}{2}$ reducirt worden.

Anmerk. In der Regel muß man vermuthen, daß jeder Bruch, welcher nicht 1 zum Zähler hat, oder erſichtlich im Zähler und Nenner durch keine einfache gemeinſchaftliche Zahl getheilt werden kann, demohngeachtet durch eine zuſammengeſetzte getheilt, alſo reducirt werden könne.

Um einen Bruch zu heben oder zu reduciren, wird eine gemeinſchaftliche, das heißt, eine ſolche Zahl geſucht, welche Zähler und Nenner oh-

ne Reſt theilt; z. B. $\frac{6}{8}$, kann durch 2 getheilt werden, $\frac{\overset{2}{6 \mid 3}}{8 \mid 4}$ hier iſt 2, alſo die gemeinſchaftliche Theilzahl.

Anmerk. Man nennt ſolche auch das *gemeinſchaftliche Maß* jener Zahlen, welche ſie ohne Reſt theilt. Zahlen, welche durch *keine andern* als *ſich ſelbſt* oder die *Einheit* (1) ohne Reſt getheilt werden können, heißen auch *einfache* oder *abſolute Primzahlen*; z. B. 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. ꝛc. Man muß dieſes wohl merken; denn es können Zahlen unter *ſich* eben gerade kein *gemeinſchaftliches Maß* haben, wie z. B. 4. 9. 25. 49, und ſind an *ſich* doch keine abſolute Primzahlen. — Solche Zahlen werden nun bloß *Primzahlen unter ſich*, ſo wie Zahlen, welche ein gemeinſchaftliches Maaß oder Theiler haben, als:

4. 16. 34. . 128, (die Zahl 2)

zuſammengeſetzte Zahlen unter ſich, genannt. —

Zum leichtern Auffinden dieſer Theilzahl, dienet Folgendes:

1. Wenn in der Decimal-Stelle der Einer, *oben* und *unten* Paarzahlen, oder 0 ſtehen, als

2, 4, 6, 8, 0,

ſo iſt der Diviſor oder die Theilzahl wenigſtens 2

z. B. $\frac{4}{8}\overset{2}{\Big|}\frac{2}{4}$, $\frac{16}{18}\overset{2}{\Big|}\frac{8}{9}$ $\frac{100}{1216}\overset{2}{\Big|}\frac{50}{108}$ ꝛc.

2. Stehen oben und unten daſelbſt 5, oder 5 und 0; ſo dividirt 5, ohne Reſt.

z. B. $\frac{50}{65}\overset{5}{\Big|}\frac{10}{13}$, $\frac{15}{25}\overset{5}{\Big|}\frac{3}{5}$

3. Finden ſich oben und unten Nullen, ſo ſtreicht man eine gleiche Anzahl gegeneinander aus; welches ſo viel iſt, als ob durch 10, 100, 1000, dividirt worden wäre.

z. B. $\frac{20\emptyset\emptyset}{69\emptyset\emptyset}\Big|\frac{20}{69}$ ꝛc.

4. Wenn die Querreihen des Zählers und Nenners, eine jede 3e oder ein Product von 3en — z. B. 9, 12, 21 ꝛc. aufſummirt enthalten: ſo iſt 3 der zuverläſſige Diviſor;

z. B. $\frac{63459}{76542}\overset{3}{\Big|}$ enthält 27 = 9 Dreyen / enthält 24 = 8 Dreyen $\Big\}\frac{21153.}{25514.}$

5. Stehen oben und unten ungleiche Zahlen, das heiſt, eine gerade und ungerade: ſo kann der Bruch niemals durch eine **gerade** Zahl, 2, 4, 6, 8 ꝛc. — gehoben werden.

6. Oft läßt ſich ein Bruch bloß durch eine **zuſammengeſetzte** Zahl, 12, 15, 19 ꝛc. heben; um ſolche zu finden, ſo dividire man

a. Mit dem Zähler in den Nenner, ohne ſich

um den Quotienten zu bekümmern. Dann ferner

b. Mit dem Reſte in den ſo eben gebrauchten Diviſor und ſo fort, bis entweder alles aufgeht, oder 1 übrig bleibt.

Im erſten Falle iſt der letzte Diviſor die Zahl, welche den ganzen Bruch hebt; im letzten Falle kann ſolcher gar nicht verkleinert oder reducirt werden. Nachſtehende Beyſpiele werden ſolches noch mehr erläutern.

```
38 } 95 | 2 } 38 | 2 }  — hier dividirte 19, ohne Reſt,
—  } 38 |   } 19 |   }  folglich hebt ſolche den Bruch.
95 } 76     } 38     }
     ——       ——
     19        0
```

```
      19
    38 | 2
    —— | —   } — Ferner
    95 |
```

ſey $\frac{805}{2829}$ zu reduciren. —

```
2829 | 3 } 805 | 1 } 414 | 1 } 391 | 17 }
 805 |   } 414 |   } 391 |   }  23 |    }
2415 |   } ——— |   } ——— |   } 161 |    }  23 iſt alſo die
———— |   } 391     }  23     }  23 |    }  Theilzahl.
 414                            161 |    }
                                ——— |    }
                                  0      }
```

```
        23
   805  | 35
  ————  | ——   } iſt folglich der reducirte Bruch.
  2829  | 123
```

Anmerk. Man ſuche ſtets die möglichſt größeſte Zahl zum Diviſor zu erhalten; deſto kürzer iſt

die Reducirung. Z. B. $\frac{36}{360}$ durch 36 gehoben, erfordert nur eine Diviſion; durch die Zahl 2 ꝛc. aber mehrere Diviſionen.

§. 9.

Brüche von verſchiedenem Nenner, auf einerley Nenner zu bringen.

1. Werden alle Nenner in einander multiplicirt. — Das daraus entſtehende Product heißt der General-Nenner, Gemeinſchaftliche Nenner, Hauptnenner, für alle dieſe Brüche: zu welchen nun noch neue Zähler geſucht werden müſſen.
2. Multiplicire man den Zähler eines jeden Bruchs in die Nenner der übrigen Brüche; — nur nicht in ſeinen eigenen, ihm zugehörigen Nenner — ſo entſtehen die neuen Zähler.

Z. B. $\frac{3}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{5}{6}$) 8.2.6 = 96, als Hauptnenner

3.2.6 = 36, als neu. Zäh. f. d. Brch $\frac{3}{8}$		
1.6.8 = 48, — — — $\frac{1}{2}$		$\frac{36,48,80}{96}$
5.8.2 = 80, — — — $\frac{5}{6}$		

ſo viel als $\frac{36}{96}$ \| $\frac{48}{96}$ \| $\frac{80}{96}$).

§. 10.

Auffindung des kleinſten Haupt-Nenners ꝛc.

Auffallend vortheilhaft würde es in dem Bey-

ſpiele des vorhergehenden §. haben ausfallen müſſen, wenn man Statt des Haupt Nenners 96, den kleinern 24 erhalten hätte; welcher dort erſt durchs Reduciren, auch alſo zwiefache Mühe, gewonnen werden konnte.

z. B. ($\frac{36}{96} \overset{(4)}{=} \frac{9}{24}$, $\frac{48}{96} \overset{(4)}{=} \frac{12}{24}$, $\frac{80}{96} \overset{(4)}{=} \frac{20}{24}$)

In folgenden Sätzen iſt das Verfahren, den kleinſten Nenner zu erhalten, ſehr deutlich mitgetheilt.

1. Zerlege man die Bruch-Nenner in ihre Factoren, das heißt ſolche Zahlen, aus welchen dieſelben durch die Multiplication entſtanden ſeyn können; ſo könnte 24 aus 2.12, aus 3.8, aus 4.6, entſtanden ſeyn; alſo wären 2 und 12, 3 und 8, 4 und 6 die Factoren aus 24.) Wenn anders die Nenner Factoren enthalten und dann, zwar wo möglich in ſolche, unter welchen einer ſchon bey der Zerlegung eines andern Nenners befindlich iſt.

z. B ($\frac{5}{24}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{4}{21}$) hier könnte 21 in 3.7, und 24 in 2.12, in 4.6, 3.8 zerlegt werden; man wähle aber die Zerlegung in 3.8, weil 3 ſchon bey der Zerlegung von 21, in 3.7 aufgenommen war.

2. Dieſes Zerlegen ſetze man fort, ſo lange ſich noch ein gemeinſchaftlicher Divi-

ſor, wenigſtens für zwey Factoren, findet.

3. Die gefundenen gemeinſchaftlichen Diviſoren, ſtelle man hinter einen beſondern Strich, ſchreibe zu ſolchen die, nach der Zerlegung übrig bleibende Zahlen, und multiplicire ſolche alle in einander; das Product giebt den geſuchten kleinſten Haupt-Nenner

Z. B. $\frac{5}{24}\ \frac{2}{7}\ \frac{4}{21}\ \frac{5}{32}$)

*	24	7	21	32
3	3.8	7	3.7	32
8	1	7	7	8.4
7	1	1	1	4
4				

3.8.7.4 = 672, als Haupt-Nenner

4. Um die neuen Bruchzähler zu erhalten, multiplicire man mit jedem Zähler in die (hier unter dem * befindlichen) Factoren nur nicht in diejenigen, welche Factoren von dem Nenner dieſes multiplicirenden Zählers ſind.

Das Product wird der neue Zähler.

Für das ſub. Nr. 3 dieſes §. gegebene Beyſpiel, ſollen zu mehrerer Erläuterung, in Nachfolgendem die Zähler geſucht werden.

Factoren waren *3, 8, 7, 4) $\frac{5}{24}$, $\frac{2}{7}$ $\frac{4}{21}$ $\frac{5}{32}$) die gegebenen Brüche.

Für den Bruch $\frac{5}{24}$, wird mit dem Zähler 5 in die unter dem * befindlichen Zahlen 7 u. 4 multiplicirt, (nicht aber auch in 3 und 8, weil ſolche Factoren vom Nenner 24, ſind; vide Nr. 4 dieſes §.) Dieſes giebt 5.7.4 = 140) Ferner vom Bruche $\frac{2}{7}$ mit dem Zähler 2 in 3, 8 und 4 (hier fällt die Zahl 7, als Zahl des Nenners von $\frac{2}{7}$ aus) folglich 2.3.8.4 = 192.)

Für den Bruch $\frac{4}{21}$, der Zähler 4 in 8 und 4 (denn 7 und 3 als Factoren von 21 fallen aus) alſo 4. 8.4 = 128.)

Für — — $\frac{5}{32}$, der Zähler 5 in 3 und 7 (denn 8 und 4 ſind Factoren von 32) giebt 105.

Die neuen Zähler, und der allen gemeinſchaftliche Nenner, wären alſo

$$= \frac{140,\ 192,\ 128,\ 105.}{672}$$

Nach §. 9, würde ſich ein viel größerer Nenner, ergeben; nemlich 112896.

Noch auffallender wird der Nutzen dieſer die Berechnung ſo ſehr abkürzenden Methode, durch Nachrechnung nachſtehenden Beyſpiels nach beyden Anleitungen, erſcheinen.

Bey

Beyſpiel.

	79	23	109	5	7	57
*	96	36	219	17	12	73
12	8	3	219	17	1	73
73	8	3	3	17	1	1
3	8	1	1	17	1	1
8						
17	alſo 12·73·3·8·17 =					

357408 zum
Haupt Nenner
Nach §. 9 wäre ſolcher
= 1555110288
357408

Differenz = 1554752880

Die neuen Zähl. würd. ſeyn

Aus 73.17.3. m. 79 = 294117
— 73.17.8 — 23 = 228344
— 12.17.8 — 109 = 177888
- 73.12.8.3 — 5 = 105120
-- 73.3.8.17 — 7 = 208488
-- 12.3.8.17 — 57 = 279072

Sum. d. Zähl. = 1293029
x
Hauptnenner = 357408

§. 11.

Addition und Subtraction.

Die Addition der Brüche, ergiebt ſich aus dem Vorhergehenden von ſelbſt.

Sollen Brüche von einerley Nenner, addirt werden, ſo ſind — einleuchtend — bloß die Zähler zu addiren, und der allen gemeinſchaftliche Nenner, als Nenner unter die Summa der Zähler zu ſetzen; wie das letzte Beiſpiel §. 10, bey x, zeigt.

Haben die Brüche verſchiedene Nenner, ſo bringe man ſolche nach §. 9 oder 10, auf einen gemeinſchaftlichen Nenner; ſuche neue Zähler, und ad-

dire ſolche; die **Summe** iſt der **Zähler** zu jenem gemeinſchaftlichen Nenner, alſo demjenigen Bruche, welcher jene zu ſummirenden Brüche, in ſich faßt.

Die **Subtraction** folgt eben ſo leicht, nach richtiger Anwendung des ſchon Mitgetheilten.

Sollen Brüche von ungleichen oder verſchiedenen Nennern von einander ſubtrahirt werden, ſo bringe man ſolche auf einen gemeinſchaftlichen Nenner, und ſubtrahire dann die Zähler; der Reſt giebt den Zähler zu jenem Nenner, und dadurch die Differenz der zu ſubtrahirenden Brüche.

Z. B. $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$) $\frac{2.4=8 \mid 3.3=9}{3.4=12}$ } alſ. $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$, die Zähler ſubtrahirt, $9-8=\frac{1}{12}$.

§. 12.

Multiplication.

Hier muß man unterſcheiden,

1. Ob Brüche mit Brüchen; oder
2. Ob Brüche mit Ganzen, oder Ganze mit Brüchen multiplicirt werden ſollen.

Ad 1.

Gilt die **allgemein** anwendbare Regel, „multiplicire Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner

Z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$) $\frac{3.2=6}{4.3=12}=\frac{1}{2}$.

Abkürzungen im Multipliciren, ſind aber möglich.

a. Wenn der Zähler des Multiplicandus, durch den Nenner des Multiplicators, ohne Reſt getheilt werden kann: in dieſem Falle multiplicire man den daher erhaltenen Quotienten mit dem Zähler des Multiplicators, welches den neuen Zähler, und des Multiplicandus Nenner, welches den neuen Nenner giebt.

Z. B. $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3}$) $6:3=2$, $2.2=\frac{4}{7}$) oder zur Probe.

$$\overset{3}{\smile}$$
$$\frac{6.2=12}{7.3=21} \Big| \frac{4}{7} \Big\}$$ wie vorhin.

b. Wenn der Nenner des Multiplicandus, durch den Zähler des Multiplicators ohne Reſt getheilt werden kann, ſo multiplicire man den dadurch erhaltenen Quotienten mit dem Nenner des Multiplicators; welches Product der neue Nenner wird, und den Zähler des Multiplicators, zum neuen Zähler erhält.

Es ſey $\frac{25}{26} \cdot \frac{2}{3}$) $26:2=13$, $13.3=\frac{25}{39}$.

$$\overset{2}{\smile}$$
Probe, $$\frac{25.2=50}{26.3=78} \Big| \frac{25}{39} \Big\}$$ wie vorhin.

c. Wenn beyde Brüche ſich übers Kreutz ohne Reſt dividiren, ſo ergiebt ſich das Product am ſchnellſten; und wird der, durch die Diviſion des Zählers des Multiplicandi erhaltene Quotient der neue Zähler; ſo wie der durch die Diviſion des Nenners des Multiplicandi entſtehende Quotient, der neue Nenner.

 Z. B.

Z. B. $\frac{15}{16} \cdot \frac{2}{3}$) $\frac{15:3=5}{16:2=8}$ } Prb { $\frac{15.2=30}{16.3=48}$ $\overset{6}{\smile}$ | $\frac{5}{8}$ } wie vorh.

Anmerk. Uebung im Rechnen, wird den Rechner bey der Anſicht vorkommender Exempel die, für ſolches paſſende nützlichſte Regel, ſogleich erkennen laſſen: man halte daher die Bemerkung derſelben nicht für ſo ſchwer, als es manchem Zaghaften ſcheinen möchte. —

Ad 2.

Ohne Unterſchied multiplicire man den Zähler des Bruchs mit der gegebenen ganzen Zahl; das Product wird der neue Zähler; der Nenner bleibt der Nenner des Bruchs. Z. B. $8 \cdot \frac{1}{4}$, oder $\frac{1}{4} \cdot 8 = 1.8 = 8.1 = \frac{8}{4}$.

Oder, man dividire den Nenner (wenn es ohne Reſt geſchehen kann) mit der ganzen Zahl; ſo iſt der Bruch ebenfalls ſogleich multiplicirt.

Z. B. $8 \cdot \frac{3}{16} = 16:8 = 2$; alſo $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

§. 13.

Diviſion.

Bey dieſer findet dieſelbe Unterſcheidung wie in der Multiplication, Statt; und hat man für die Diviſion der Brüche durch Brüche, ebenfalls eine allgemein anwendbare Regel. Als:

„Man kehre den Diviſor um (ja nicht das Di-

vidend) und multiplicire dann Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner“.

Z. B. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 = 8}{3 \cdot 3 = 9}$

Abkürzungen finden auch hier, und zwar dann Statt,

a. Wenn Zähler durch Zähler, und Nenner durch Nenner ohne Reſt getheilt werden können.

Z. B. $\frac{15}{16} : \frac{3}{8} = \frac{15:3}{16:8} \Big| \frac{5}{2} \Big\}$ Prb., $\frac{15 \cdot 8 = 120 = 5}{16 \cdot 3 = 48 = 2}$

b. Wenn der Zähler des Diviſors den Zähler des Dividendi ohne Reſt dividirt, ſo multiplicire man den Quotienten mit des Diviſors Nenner; das Product iſt der neue Zähler, welcher des Dividendi Nenner zum Nenner erhält. Z. B.

$\frac{8}{13} : \frac{2}{7}$) $8 : 2 = 4$, $4 \cdot 7 = 28$, $\frac{28}{13}$ > Prb. $\frac{8 \cdot 7}{13 \cdot 2} \Big| \frac{56}{26} \Big| \frac{28}{13}$, wie vorh.

Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt werden, ſo kann man entweder,

a. mit der ganzen Zahl den Nenner multipliciren, und den Zähler ungeändert laſſen.

Z. B. $\frac{6}{7} : 3 = 7 \cdot 3 = 21$; alſo $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$;

b. Oder man dividire den Zähler des gegebenen Bruchs mit der ganzen Zahl, und laſſe den Nenner ungeändert.

Z. B. $\frac{6}{7} : 3 = 6 : 3 = 2$, $\frac{2}{7}$) wie vorhin. —

Not. a, iſt allgemeiner anwendbar als b.

Soll aber eine ganze Zahl mit einem Bruche dividirt werden, ſo multiplicire man den Nenner des gegebenen Bruches mit der ganzen Zahl, und dividire das Product durch den Zähler deſſelben.

Z. B. $6 : \frac{3}{4}$) $6 . 4 = 24 : 3 = 8$.

Als eine allgemeine für die Diviſion der Brüche mit ganzen Zahlen, und der ganzen Zahlen mit Brüchen, anwendbare Regel, nehme man an; daß wenn die ganze Zahl durch Unterſetzung der Zahl 1, (vide § 6) in Bruchform ausgedrückt iſt, die Diviſion ganz wie unter bloßen Brüchen, vorgenommen werden kann.

Es ſollen die beyden letzten Beyſpiele ſolches beſtätigen.

$\frac{6}{7} : 3$) $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ } wie vorhin; und

$6 : \frac{3}{4}$) $= \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$. } gleichfals wie vrh.

Anmerk. Anfängern fällt die Bemerkung gewöhnlich auf, daß die Producte in der Multiplication der Brüche, kleiner als das Multiplicandum; und in der Diviſion der Quotient größer als das Dividendum werden ꝛc.

Allein in Rückſicht des erſtern, erwäge man nur; daß z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt (oder 3 mit 2) ſo viel heiße, „als man ſolle 3, zweymal; oder $\frac{2}{3}$ zweydrittelmal nehmen;“ folglich muß das Product kleiner, und zwar, weil das

Multiplicandum nur zweydrittelmal genommen iſt, um $\frac{1}{3}$ kleiner, als dieſes letztere, ausfallen.

Bey der Diviſion wäre aber zu berückſichtigen, daß eine Zahl durch die andere theilen, ſo viel heiße, als eine Zahl finden, welche in dem Dividendo ſo vielmal enthalten ſey, als der Diviſor anzeigt. Nach dieſem aber hieße z. B. $6 : \frac{3}{4}$ ſo viel, „man ſolle einen Quotienten finden, welcher nur $\frac{3}{4}$ mal genommen, ſo groß als 6 wäre.“ Wie wir geſehen haben, ſo wird hier nach den Regeln der Diviſion der Quotient $\frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$ ſeyn; $\frac{1}{4}$ von 8 iſt aber 2; $\frac{3}{4}$ von 8 alſo 6; es iſt alſo einleuchtend richtig, daß der Quotient 8, größer als das Dividendum 6 ſeyn müſſe.

§. 14.

Schätzung der Brüche.

Unter ſolcher verſteht man gewöhnlich das Verfahren, „durch welches ein oder mehrere kleinere Theile desjenigen Ganzen, von welchem der zu ſchätzende Bruch einen größern Theil anzeigt, ausgemittelt werden. — Denn oft iſt ein Bruch möglichſt klein ausgedrückt, und dem ohngeachtet kann man ſeinen Werth nicht ganz nach Wunſch beur-

theilen. —" Man wollte z. B. wiſſen, „wie viel $\frac{11}{13}$ Rthlr. ſey?“

Sicher will dieſes ſo viel ſagen,

„Wie viel betragen $\frac{11}{13}$ Thaler in Groſchen und Pfennigen?“

Nun iſt aber bekannt, daß 288 Pfennige, 1 Thaler ſind; daß $\frac{13}{13}$ Thaler auch 1 Thaler, alſo auch = 288 Pfennige. Der 13te Theil von 288, alſo 11mal genommen, muß die Anzahl Pfennige für $\frac{11}{13}$ Thaler angeben.

288 : 13 = $22\frac{2}{13}$, dieſes mit 11 multiplicirt, giebt $242\frac{9}{13}$ Pfennig, oder 20 Gr. $3\frac{9}{13}$ Pfennig.

Hieraus ließe ſich dann folgende Regel ableiten: „Multiplicire mit dem Zähler diejenige Anzahl Theile des Ganzen, von welcher Sorte du die, dem zu ſchätzenden Bruche zuſtehende Anzahl auszumitteln wünſcheſt: — in dem vorſtehenden Beyſpiele alſo 288 mit 11 = 3168 — und dividire das Product durch den Nenner — (3168 : 13 = $243\frac{9}{13}$ wie vorhin)“.

„Oder noch Sachangemeſſener, aber nicht ſo praktiſch nützlich, — dividire man jene Anzahl Theile des Ganzen mit des Bruchs Nenner, und multiplicire den Quotienten mit dem Zähler.

Noch ein Beyſpiel.

$\frac{3}{4}$ Acker — der Acker zu 160 □ Ruthen — wie viel ſind's Ruthen?

(160:4 = 40, 40.3 = 120 Ruthen,

oder:

(160.3 = 480, 480:4 = 120 Ruthen.

b) Decimal-Bruchrechnung.

§. 15.

Diejenigen Brüche, welche zum Nenner die Zahl 10, oder ein Product aus 10 in 10, als 100, 1000, 10000, 100000 ꝛc. haben, werden Decimalbrüche genannt. Alle dieſe Nenner, ſind alſo aus 10 in 10 entſtanden; daher ſie zehntheilige, oder nach dem lateiniſchen Decem (zehn), Decimalbrüche heißen.

— Der außerordentliche Nutzen derſelben, ſchränkt ſich nicht bloß auf mathematiſche Rechnungen ein; ſondern er erſtreckt ſich auch auf jede Rechnung, welche im nicht-mathematiſchen Geſchäftsleben nur vorkommen mögen. Ein Jeder, welcher nur mit einiger Gewandheit ſolche zu gebrauchen lernt, wird mit dem halben Zeitaufwande, und dem, wegen der ſo einfachen Behandlung derſelben, ſo ſehr erhöheten Grade der Zuverläſſigkeit die mühſamſten Bruchrechnungen mit der größeſten Leichtigkeit und Vergnügen, beſeitigen können: — ich muß aus dieſen vollgültigen Gründen, das Studium dieſer Rechnung, meinen Leſern angelegentlichſt empfehlen. —

So wie man bey ganzen Zahlen den Werth der Ziffern von der rechten zur linken Hand, mit jeder Zahlſtelle um 10mal größer werden läßt, ohne den erhöheten Werth beſonders aus-

zudrücken; eben ſo konnte ſolcher umgekehrt, von der Linken zur Rechten um 10mal verringert, angenommen, und ebenfalls die beſondere Bezeichnung weggelaſſen werden. So wie 872 nicht 8 hundert 7zig und 2 geſchrieben wird, ſondern der, denen Zahlen einmal beygelegte Werth und deſſen Benennung, ſich ſogleich durch den Anblick ergiebt; eben ſo leicht verſtändlich konnte man daher $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{4}{10000}$ durch die Vorausſetzung jener angenommenen Verringerung des Werthes, mit Weglaſſung der Nenner, alſo ſchreiben.

0.1234

Welches ebenfalls 1 Zehntel, 2 Hundertel, 3 Tauſendel, 4 Zehntauſendel, ausdrückt.

Die 0, bezeichnet die Stelle der Ganzen. — Der Punkt trennt die Ganzen und Bruchtheile, zur Verhütung aller Verwechslung. — Man nimmt auch ein Comma oder Apoſtroph dazu; da beyde aber oft für 1, geleſen werden, ſo will ich hier den Punct beybehalten, und ſolchen in der Folge „Decimalpunct“, nennen.

Nachſtehende Tafel, wird den Werth und die Benennung der Decimalſtellen völlig anſchaulich ergeben.

Tafel.

3.0000000 ; ; ;	3 Ganze und keine Bruchtheilchen.
3.1000 ; ; ; ;	3 Ganze und 1 Zehntel.

3.0100 ⸗ ⸗ ⸗ 3 Ganze und kein Zehntel, aber 1 Hundertel.

2.0010 ⸗ ⸗ ⸗ 2 Ganze und kein Zehntel, kein Hundertel aber 1 Tauſentel.

0.0001 ⸗ ⸗ ⸗ kein Ganzes, kein Zehntel, k. H.; k. T.; aber 1 Zehntauſentel.

12.00001 ⸗ zwölf Ganze; kein Z.; k. H.; k. T.; k. zT.; aber ein Hunderttauſentel.

133.000001 ⸗ ; 133 Ganze; kein 00000 aber 1 tauſend mal tauſentel oder 1 Milliontheilchen.

1.0000001 ⸗ 1 Ganzes, kein 000000, aber 1 Zehnmilliontheilchen.

4.23456789 Wird folglich geleſen werden müſſen, „4 Ganze, 2 Zehntel, 3 Hundertel, 4 Tauſentel, 5 Zehntauſentel, 6 Hunderttauſentel, 7 Milliontheilchen, 8 Zehnmilliontheilchen, 9 Hundertmilliontheilchen.

Dieſe Abnahme der Bruchwerthe, kann ſich nun jeder bis ins Unendliche fortgeſetzt, denken. —

Anfänger, müſſen ſich zuerſt die Decimalſtellen richtig zu leſen, üben, können ſie erſt dieſes, ſo wird es ihnen auch leicht fallen, jeden Decimalbruch ohne Nenner, in ſeine gehörige Decimalſtelle zu ſetzen. Z. B. $\frac{3}{100}$. —

Die Stelle der Ganzen, wird jederzeit wenn Ganze fehlen, durch 0. bezeichnet, und zuerſt hingeſchrieben; dann ſetzt man den Zähler in diejenige Decimalſtelle, welche nach der Angabe des Nenners ihm zugehört; alſo hier bey $\frac{3}{100}$ in die, der Hundertel. Folglich 0.03. —

Man ſchreibe ferner, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{100000}$. —
0.10203

Wie die Ziffern zeigen, und es ſich auch ſchon von ſelbſt erläutert, werden die Decimalſtellen, für welche keine Brüche da ſind, mit 0 ausgefüllt; ſo, hier die Stellen der 100tel und 10000tel. —

§. 16.

Decimalbrüche auf einerley Benennung zu bringen.

Da nach dem Vorausgeſchickten, der Werth der Zähler bloß durch die Stellung des Decimalpunktes — vide §. 15 — beſtimmt wird; ſo kann man, wenn die Stelle der Ganzen einmal richtig bemerkt wurde, zur Rechten, ohne den Werth der Zahlen dadurch zu verändern, jede gefällige Anzahl Nullen anhängen. — Z. B. 3.021 iſt gleich 3.02100000 ꝛc. — Hierauf gründet ſich das einfache Verfahren, Decimalbrüche auf einerley Benennung zu bringen. — Nemlich,

An diejenigen Brüche, welche die wenigſten

Decimalſtellen haben, hänge man zur Rechten ſo viel Nullen an, als zur Ausgleichung der Decimalſtellen des, die mehreſten Stellen enthaltenden Bruches, nöthig ſind. Z. B. 0.345, 2.03, 0.006732, 8.7002; dieſe ſind ſogleich auf einerley Benennung gebracht, wenn in dem 1ten, 2ten und 4ten Bruche, die, gegen den 3ten Bruch fehlende Decimalſtellen, durch Nullen ausgeglichen ſind; als 0.345000, 2.030000, 0.006732, 8.700200.

Jetzt haben alle, 6 Decimalſtellen, und ſind dadurch zu Milliontheilchen geworden.

§. 17.

Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Dieſe Verwandlung iſt jederzeit entweder vollkommen genau, oder doch wenigſtens bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit, möglich. Nachdem man nun einen gemeinen Bruch bis zu 10tel 100tel, 1000tel, 10000tel ꝛc. genau als Decimalbruch darzuſtellen wünſcht, ſo hänge man dem Zähler nur eine, oder 2, 3, 4, 5 . . . Nullen an, und dividire durch den Nenner. Dem Quotienten werden von der Rechten zur Linken durch den Decimalpunct ſo viel Decimalſtellen abgeſchnit-

ten, als Nullen angehängt waren *). Man ſoll z. B. $\frac{3}{4}$ in einem Decimalbruche, und zwar bis zu 10000 Theilchen genau ausdrücken; ſo müſſen 4 Nullen angehängt werden; als

$$\begin{array}{l|l} \not{2} & \\ \not{3}\not{0}\not{0}00 & 7500;\ \text{alſo}\ 0.7500. \\ 44, & \end{array}$$

— Denn die 4te Decimalſtelle, iſt die Stelle, in welcher die Zehntauſendel ſtehen. Prüft man dieſen Anſatz nach der gemeinen Bruchrechnung, ſo wird ſich die Richtigkeit deſſelben überzeugend auffinden laſſen. — Unbezweifelt iſt der Bruch $0.7500 = \frac{7500}{10000}$; oder nach §. 7. Nr. 3.

$$= \frac{75\not{0}\not{0}}{100\not{0}\not{0}} = \frac{\overset{25}{75}}{100}\Big|\frac{3}{4};$$ alſo vollkommen genau als Decimalbruch ausgedrückt.

Sollte aber $\frac{2}{3}$ verwandelt werden, ſo wird der Ausdruck deſſelben und wenn Millionen Nullen angehängt würden, niemals vollkommen genau herzuſtellen, möglich ſeyn, ſondern ſtets ein Reſt bleiben; dieſes iſt der Fall bey allen Brüchen, deren Nenner nicht 2 oder 5, oder eine Potenzzahl von ſolchen, als die Zahl 4, 8, 16, 32, 64, 128 ꝛc. oder 25, 125 ꝛc. iſt.

Beyſpiel von $\frac{2}{3}$.

---

*) Im 19ten §. wird bemerkt, wie verfahren werden müſſe, „wenn der Quotient wenigere Decimalſtellen zählt, als er erhalten ſolle“.

2222222222222
2000000000000 . ∴ (666666666666
3333333333333

— Bis ins Unendliche wird 2, Reſt bleiben. —

Es iſt alſo bewieſen, daß nicht jeder gemeine Bruch, vollkommen genau als Decimalbruch ausgedruckt werden kann: aber eben ſo einleuchtend gezeigt, daß man den Grad der Genauigkeit durch die größere oder kleinere Anzahl angehäufter Nullen, beliebigſt beſtimmen könne.

Die Genauigkeit aber auch nur bis zu 4 Decimalſtellen (nemlich 10000 Theilchen) zu ſuchen, iſt für alle Fälle welche in denen bedeutendſten gemeinen Rechnungsaufgaben vorkommen können, überflüſſig zureichend.

§. 18.

Decimalbrüche zu addiren und zu ſubtrahiren.

Für beyde Rechnungsarten gilt Folgendes.

Man ſetze die Zahlſtellen mit dem Decimalpuncte untereinander, und laſſe die übrigen in ihrer Ordnung folgen. Die Anzahl der Decimalſtellen, wenn ſolche ungleich ſind, gleiche man durch Nullen aus, addire oder ſubtrahire wie in ganzen Zahlen; und ſchneide durch den Decimalpunct in der Summe oder dem Reſte, ſo

viele

viele Decimalſtellen von der Rechten zur Linken ab, als vor geſchehener Addition oder Subtraction, abgeſchnitten waren.

Es ſollen z. B. 36.354; 0.0219; 3.1029763; addirt werden.

3.1029763		3.1029763
0.0219000	oder	0.0219
36.3540000		35.354
39.4788763	|	39.4788763

Oder es wäre 4.567803, von 5.009, zu ſubtrahiren;

$$\begin{array}{r} 5.009000 \\ 4.567803 \\ \hline \end{array}$$

Reſt = 0.441197.

§. 19.

Multiplication.

Die Decimal⸗Bruchzahlen werden wie die ganzen Zahlen (ohne Berückſichtigung des Decimalpunctes) mit einander multiplicirt, und die Producte ſummirt; dann aber von dieſer Productenſumme, von der Rechten gegen die linke Hand ſo viele Decimalſtellen abgeſchnitten, als das Multiplicandum und der Multiplicator beyde zuſammen genommen, zählen z. B.

z. B.

```
4.63 × 9.213 — { 9213
                  463
                 -----
                 27639   } 42.65619
                5 5278
               36 852
              --------
              42.65619
```

Sollte die Productenſumme nicht ſo viele Decimalſtellen enthalten als abgeſchnitten werden müſſen; ſo ergänze man die Fehlenden ſowohl, als die Stelle der Ganzen, durch zur Linken vorgeſetzte Nullen. — Dieſes ſey hier zugleich für §. 17, wo daſſelbe geſchehen muß, wenn der Quotient wenigere Decimalſtellen zählt, als er erhalten ſoll, mitbemerkt. Für beyde zur Erläuterung ein Beyſpiel.

Es ſey {a, 0.0027 mit 0.000813 zu multipl. —; und {b, $\frac{6}{1725}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

```
                                   600000000 | 347826,
                                   1725 .....
                                   5175 .....
       0000813                     ---------
        00027                       8250 .....
      --------                      6900 ....        alſo
Ad a {   5691  } Ad b {            ---------
         1626                       13500 ...
      --------                      12075 ...     0.00347826
   0,0000021951                    ---------      der bis zu Hun-
                                     14250 ..     dertmillion-
                                     13800 ..     theilchen ge-
                                    ---------     ſuchte Deci-
                                       4500 .     malbruch.
                                       3450 .
                                    ---------
                                       10500
                                       10350
                                    ---------
                                         150
```

Abgekürzte Multiplication.

Wenn die Umſtände einer Rechnungsaufgabe, nicht einen beſondern Grad von Genauigkeit fordern; ſo kann man bey der Multiplication großer Zahlen, eine in nachſtehenden Regeln mitgetheilte bedeutende Abkürzung, vornehmen.

1. Statt wie gewöhnlich, von der äuſerſten Zahl zur Rechten (der Stelle der Einer) die Multiplication anzufangen, ſo multiplicire man entgegengeſetzt, von der äuſerſten Zahl zur Linken, in die Stelle der Einer des Multiplicandi, zuerſt; als,

$$\begin{array}{r} 3.692034 \\ 2.354213 \\ \hline 7.384068. \end{array}$$

2. Soll das Product bis zu 100 ꝛc. theilchen genau geſunden werden, ſo fahre man auf dieſelbe Art mit der 2ten ; 3ten Zahl fort; und rücke mit den Producten um eine Zahlſtelle zur Rechten, heraus.

$$\begin{array}{r} 3.692034 \\ 2.354213 \\ \hline 7.384068 \\ 1.1076102 \\ 18460170 \end{array}$$

Iſt eine ſolche Genauigkeit — wie bey denen Berechnungen, welche die Leſer dieſer Schrift zu beſorgen haben könnten — nicht nothwendig, ſo läßt man, ſo oft eine neue Zahl multiplicirt, im Multiplicando eine Zahl weg, wie nachſtehendes Beyſpiel zeigt.

3.692034
2.354213
7.384068
1.107609
184600
14768
738
36
9
8.691828

3. Die erhaltenen Producte, werden dann wie gewöhnlich addirt.

Stellt man eine Vergleichung unter den Producten der mehr, weniger, oder gar nicht abgekürzten Multiplication an; ſo wird man finden, daß die Differenz zwiſchen den Producten der völlig abgekürzten und vollkommenen Multiplication, hier nur in der 5ten Decimalſtelle — nemlich der 100000tel — eine Einheit, und zwiſchen dem Producte der weniger, nemlich erſt nach den Decimalſtellen der 100tel abgekürzten Multiplication, nur in der 8ten Decimalſtelle 2 Einheiten beträgt; wie nachſtehende Beyſpiele zeigen.

3.692034	3.692034	3.692034
2.354213	2.354213	2.354213
7.384068	7.384068	11076102
1.107609	1.1076102	3692034
184600	18460170	7384068
14768	1476812	14768136
738	73840	18460170
39	3692	11076102
9	1107	7384068
8.691828	8.69183441	8.691834439242
a.	b.	c.

8.691834439242	8.691834439242
8.691828	8.69183441
0,000006439242	0.000000029242
Differenz zwiſchen a u. c.	Differenz zwiſchen b u. c.

§. 20.

Diviſion.

Auch hier ſind nur wenige Regeln zu merken; als:

1. Mögen die Brüche Ganze bey ſich haben oder nicht, ſo müſſen ſolche auf einerley Benennung gebracht und dann ohne Berückſichtigung des Decimalzeichens, wie gewöhnlich dividirt werden. Der Quotient erhält ſo viele Decimalſtellen, als der Bruch des Dividendi mehrere Nullen wie der Diviſor hat. Sollte dieſe Regel für einen vorkommenden Fall nicht zureichend ſeyn, ſo ſtelle man

2. Zwiſchen den, im Dividend und Diviſore enthaltenen Zahlen, ohne auf das Decimalzeichen zu ſehen, eine Vergleichung an, „ob der Diviſor das Dividend nach ſeiner Größe theilen könne; iſt die Zahl des Dividendi dazu zu klein, ſo hängt man die erforderliche Anzahl Nullen an, und dividirt dann (ohne ſich um die etwa zur linken vorſtehende Nullen zu bekümmern) mit den Zahlen des Diviſors in die Zahlen und etwa angehängte Nullen des Dividends. Dem Quotienten gebe man ſo viele Decimalſtellen, als derſelbe (mit Einrechnung aller angehängten Nullen, ſelbſt, wenn außer ſolchen noch beſondere Nullen zu genauerer Auffindung angehängt worden wären) mehrere Decimalſtellen wie der Diviſor hat.

3. Enthält der Diviſor allein Decimalſtellen, ſo bekömmt der Quotient bloß dann Decimalſtellen, wenn, um den Quotienten genauer zu finden, Nullen zur Rechten angehängt worden ſind. Eigentlich iſt dieſer Fall ſchon in Nr. 1. dieſes §., mit umfaßt. — Man ſtelle Rechnungs-Vergleiche an.

4. Zum Ueberfluß noch die Bemerkung „daß man die Diviſion durch Anhängung von Nullen, nach Belieben weiter fortſetzen kann. In Rückſicht des, dann für den Quotienten zu Beſorgenden, iſt in dem Vorhergehenden ſub. Nr. 2., ſchon das Nöthige geſagt. Für je-

den Fall ſollen hier nach der Nummer, Bey-ſpiele mitgetheilt werden.

Ad. 1.

Es ſolle	0.0643, dividirt werden durch	5.02	(a)
	6.8023, — — —	4.1	(b)
	21.32 — —	3.0	(c)
	0.457, — — —	0.2	(d)

Auflöſung.

a. 0.0643 | 0.0643000∅∅ | 1280; alſo 0.01280
5.0200 | 502 . . . ∅∅ |
1410 . .
1004 . .
4060 .
4016 .
440

b. 6.8023 | 6 802300000 | 165902; alſo 1.65902
4.1000 | 4.1 . . . . 000 |
270 . . . .
246 . . . .
242 . . .
205 . . .
370 . .
369 . .
100
82
18

c. 21. 32 | 21.320∅∅ | 710; alſo 7.10.
3. 00 | 3 . . . ∅∅ |
21 . .
3 .
2

```
d. 0.457 | 457000 | 2285 ; alſo 2.285.
   0.200 | 2...00 |
           4...
           ----
            5..
            4.
           ----
            17
            16
           ----
            10
```

Ad. 2.

Es ſolle 0.002 dividirt werden durch 0.3567

```
0.0020000 | 0.002000.000 | 560 ; alſo 0.00560
0.3567    |       3567.. |
               17835..
             ---------
                21650.
                21402.
             ---------
                 2480
```

Ad 3.

Es ſey {6 durch 2.34 / 6 — 0.34} zu dividiren; —

```
6.00 | 6.0000 | 256 ; alſo 2.56     | 6.0000 | 17.64
2.34 | 2.34.. |                     | 3 4    |
       4.68..                       | 2 60..
     --------                       | 2 38..
       1.320.                          220.
       1170.                           204.
     --------                         -----
       1500                            160
       1 404                           136
     --------                         -----
         96                             24
```

Nr. 4, iſt aus dem Vorhergehenden ſchon deutlich. Sollten Anfänger zuweilen zweifelhaft

werden, ob ſie auch richtig verfahren haben, (welches oft geſchieht) ſo empfehle ich ſolchen die gemeine Bruchrechnung zur Probe.

Obiges Beyſpiel, 6, dividirt durch 2.34, deſſen, Quotient 2.56., ſoll den Gang der Proberechnung zeigen. Man löſe Dividend und Diviſor in einen gemeinen Bruch auf, als $\frac{6}{1}$, und $2\frac{34}{100} = \frac{234}{100}$; es wären alſo 6 Ganze durch $\frac{234}{100}$ zu dividiren. Dieſes geſchieht nach §. 13, durch

$$\frac{6}{1} \times \frac{100}{234} = \frac{600}{234} = 2.\frac{132}{234} = 2.\frac{22}{39}, \text{ der Quot.}$$

Drückt man dieſen Quotienten nun wieder in einem Decimalbruche aus, — vide §. 17 : 2200 | 56,

```
 39.
195.
----
 250
 234
----
  16
```

alſo mit Vorſetzung der 2 Ganzen, 2.56, $\frac{16}{39}$, welches dem obigen Quotienten, deſſen Richtigkeit wir prüften, nemlich $2.56\frac{96}{234}$ völlig gleich iſt. Iſt der, bey der Diviſion in Decimalbrüchen übrig bleibende Reſt größer als $\frac{1}{2}$, ſo ſetzt man der letzten Zahlſtelle des Quotienten, eine Einheit zu —. Alſo in dem Beyſpiele 6, dividirt durch 0.34, war der Quotient 17.64 und blieb noch Reſt 24; dieſe 24 ſind bekanntlich der Zähler von einem Bruche, deſſen Nenner der Diviſor iſt; alſo $\frac{24}{34} = \frac{12}{17}$. Offenbar iſt dieſer Bruch größer als $\frac{1}{2}$, man ſetze alſo

den Quotienten Statt 17.64, 17.65. Iſt der Reſt aber **kleiner** als $\frac{1}{2}$; ſo läßt man ſolchen ganz weg, wie in dem Beyſpiele 6, dividirt durch 2.34, wo der Quotient 2.56, ohne den Reſt $\frac{96}{234}$ war; dieſer Reſt iſt auffallend kleiner, als $\frac{1}{2}$.

In dem erſten Beyſpiele wurde der Quotient dadurch, daß die letzte Zahl um 1 vergrößert wurde, um $\frac{5}{17}$ zu **groß**; im letztern Beyſpiele durch die Weglaſſung des Reſtes um $\frac{96}{234}$ zu **klein**; welches ſehr unbedeutend; denn jene $\frac{5}{17}$, ſind $\frac{5}{17}$ eines Hundertheilchens, und jene $\frac{96}{234}$, ſind ebenfalls $\frac{96}{234}$ eines Hunderttheilchens.

Abgekürzte Diviſion.

Auch die Diviſion läßt eine Abkürzung in denjenigen Fällen zu, wo nicht ein beſonderer Grad von Schärfe erfordert wird. Nachdem nemlich **Dividend** und **Diviſor** bis zum wirklichen Dividiren nach den angegebenen Regeln geordnet ſind, ſo dividire man wie gewöhnlich; nur laſſe man (bey beabſichtigter **völliger** Abkürzung) bey jedem **Theile** des Quotienten immer die **niedrigſte** Ziffer des **Diviſors** weg; wie das beyſtehende, mit a, bezeichnete Beiſpiel ergiebt. In dem Beiſpiel b, iſt gezeigt, wie man dadurch, daß erſt bey der 2ten 3ten Zahl des Quotienten abgebrochen wird, den Grad der Genauigkeit erhöhen kann.

a. 12.3456 div. durch 4.2134

```
12.3456 | 2.9302.
 4.2134 |
 8 4268
-------
 3 9188
   4213
 3 7917
-------
   1271
    421
   1263
-------
     08
     44
      4
      8
-------
      0
```

b.

```
12.34 56000 | 2.9300803
 4.21 34...
 8 4268...
----------
 3 91880..
   42134..
 3 79206..
----------
   126740.
    42134.
   126402.
----------
      3380
     42134
      4213
       421
      3368
----------
       012
        42
         4
        12
----------
         0
```

Wenn man dieſes Beyſpiel nun ohne alle Abkürzung dividirt; ſo wird man bey der Vergleichung der 3 Quotienten, einen unbedeutenden Unterſchied finden.

Nutzen und leichte Anwendung der Decimal-Bruchrechnung, auf gemeine Bruchrechnungs-Aufgaben; durch einige Beyſpiele bewieſen.

Daß viele Rechner und Geometer von dieſer be-

quemen Rechnung ſo ſelten Gebrauch machen; iſt wohl gröſtentheils dem Mangel an Kenntniß, zum Theil aber auch der lieben Trägheit, zuzuſchreiben, daß ſich ſolche nicht die geringſte Mühe geben wollen, ſich einige Gewandheit, in Anwendung derſelben auf vorkommende Aufgaben, zu erwerben.

Es wird mir, in Berückſichtigung dieſes wichtigen Gegenſtandes, daher wohl erlaubt ſeyn, meinen Leſern einige anlockende Winke mitzutheilen.

a. Sind nemlich — wie §. 10 u. 11. — Brüche von großen Zahlen, zu addiren; ſo wird ſolches eine ſehr mühſame und wenigſtens 18 ‧ 20 Minuten Zeit ‧ Aufwand erfordernde Rechnung verurſachen. Verwandelt man aber jeden Bruch in einen Decimalbruch, und addirt nach den bekannten Sätzen der Decimaladdition; ſo kann das Summiren mit der gröſten Leichtigkeit, in 6 ‧ 8 Minuten, und zwar, wegen des weit einfachern Verfahrens, mit viel gröſſerer Zuverläſſigkeit, vollendet ſeyn. Zur Vergleichung mit jener, §. 10 ſub x zu findenden Berechnung, auch dieſe durch die Decimalen — !

Beyſpiel.

$\frac{79}{96}$ $\frac{23}{36}$ $\frac{109}{219}$ $\frac{5}{17}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{57}{73}$

```
79.0000|0.8229 || 23.0000| 0.6389 ; und wegen des
 96...              36...   Reſtes 32, 0.6390.
768...             216...
------             ------
220..              140..
 96..              108..
192..              ------
------              320.
280.                288.
 96.               ------
192.                320
------              288
 880               ------
  96                 32
 864
------
  16

109.0000|0.4977 || 5.0000|0.2941 || 7.0000|0.5833
 219...             17...            12...
 876...             34...            60...
-------            ------           ------
 2140..             160..            100..
 1971..             153..             96..
-------            ------           ------
 1690.               70.              40.
 1533.               68.              36.
-------            ------           ------
 1570                20               40
 1533                17               36
-------            ------           ------
   37                 3                4
```

57.0000|0.7808||	Dieſe Decimalbrüche add:
73...	
511...	$\frac{79}{96} = 0.8229$
590..	$\frac{23}{36} = 0.6390$
584..	$\frac{109}{219} = 0.4977$
600	$\frac{5}{17} = 0.2941$
584	$\frac{7}{12} = 0.5833$
	$\frac{57}{73} = 0.7808$
16	Sum. = 3.6178

Vergleicht man dieſe Summe mit der, §. 10, ſub x befindlichen; das heißt: verwandelt man die dortige gemeine Bruchſumme = $\frac{1293029}{357408}$ in einen Decimalbruch, ſo erhält man 3.6177..

— Jetzt gefundene, 3.6178

Differenz = 0.0001

Alſo bey der ungemeinen Zeiterſparniß und viel leichtern Rechnung, nur um 1 Zehntauſendtheilchen gefehlt.

b. Oft kommen Brüche in ſehr großen Zahlen vor, welche ſich aller vielfach aufgewandten Mühe ohngeachtet, nicht reduciren laſſen, und die Vorſtellung ihrer Größe, dadurch ſehr erſchweren. Jene fruchtloſe Zeitzerſplitternde Arbeit, kann man durch augenblickliche Verwandlung des gedachten Bruchs in einen Decimalbruch, erſparen; und die Vorſtellung des Bruchwerthes ſich äuſerſt erleichtern. Z. B. Es iſt der Bruch, $\frac{347999}{563365}$ ſchlechterdings nicht zu reduciren: man verwandle ſolchen in einen Decimalbruch, ſo ergiebt ſich

0.6177...

woraus einleuchtet, „daß derſelbe füglich für $\frac{6}{10}$ = $\frac{3}{5}$ angenommen werden könne, ohne auch nur um 2 Hunderttheilchen zu fehlen.

So kann man auf dieſelbe Art, ſehr leicht Brüche mit einander vergleichen, „welches der größere ſey, und zwar um wie viel ꝛc.“

$\frac{6}{7} = 0.8571$
$\frac{7}{8} = 0.8750$
$\frac{5}{6} = 0.8334$
$\frac{8}{9} = 0.8889$

} Der größere Decimalbruch, bezeichnet natürlich den größern gemeinen Bruch.

c, Können Decimalbrüche ohne weitere Rechnung auch mit Ganzen zuſammengeſetzt werden, und alſo einen gemeinſchaftlichen Ausdruck bilden, welches bey gemeinen Brüchen bekanntlich erſt durch oft mühſame Rechnung möglich iſt. Auch die Erkennung der Ganzen und Bruchtheile in einem unächten Bruche, ergiebt ſich aus dem bloßen Anblicke der Zahlen, da dort ebenfalls Berechnungen vorausgehen müſſen. Es ſollen z. B. 326 und $\frac{11}{1799}$ in einem Bruche gemeinſchaftlich ausgedrückt werden, ſo geſchieht ſolches nach §. 6, auf folgende Art,

```
   1799
    326
  -----
  10794
  3598
 5397
 ------
 586474     = 586485
     11       ------
 ------        1799
 586485
```

Wäre $\frac{11}{1799}$ aber als Decimalbruch = 0.006114,

ausgedrückt; ſo ſchreibt man jene 326, in die Stell der 0. ohne alle weitere Rechnung; alſo 326.006114.

Für den vorhergehenden gerügten 2ten Fall, ſey der Bruch = $\frac{35789}{45}$ angenommen: hier muß erſt der Nenner in den Zähler dividirt werden.

```
35789|795 14/45
45..
315..
-----
 428.
 405.
-----
  239
  225
-----
   14
```

Durch den Ausdruck eines gleich großen Decimalbruchs, als 795.311111... ſtehen aber die Ganzen an ſich ſchon von den Brüchen getrennt —.

3. Einiges über Potenzen, und Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. 21.

Potenz oder Dignität, nennt man das Product aus gleichen Factoren, und jeden ſolcher Factoren, welcher die Potenz miterzeugt, die Wurzel der Potenz.

Es ergeben 3 × 3, 4 × 4 × 4 ꝛc. Potenzen von 3, 4 ꝛc. ſo wie 3, 4, die Wurzeln von ſolchen; nemlich 3 von 3 × 3, und 4 von 4 × 4 × 4. Die Anzahl der Factoren beſtimmt den Namen der Dignitäten. Dieſe werden nemlich nach ſolchen die zweite, dritte ꝛc. Dignität oder Potenz genannt. Die Anzahl der Factoren, heißt der Grad derſelben; z. B. 2 × 2, eine Potenz vom 2ten Grade; 3 × 3 × 3, eine Potenz vom 3ten Grade. Die Potenz des 2ten und 3ten Grades, erhält nun noch die hier beſonders zu bemerkende Namen, nemlich Quadratzahl und Cubikzahl; ſo wie die Wurzeln aus ſolchen, „Quadrat- und Cubikwurzeln genannt werden. —

§. 22.

Wurzeln aus einer Größe ziehen, heißt nichts anders, „als ſolche in eine beſtimmte Anzahl Factoren zerfällen und einen davon nehmen.“

Grad der Wurzel, nennt man aber diejenige Größe, welche anzeigt, in wieviel gleiche Factoren die Potenzgröße zerlegt werden ſoll. Zur Unterſcheidung der Wurzeln nach ihren verſchiedenen Graden, bedient man ſich eines verzogenen r — der erſte Buchſtabe von radix (Wurzel) welches die ſchon vorn in der Erklärung arithmetiſcher Zeichen §. 1. angezeigte Geſtalt √ erhalten hat; und ſetzt dann über daſſelbe eine Ziffer, deren Einheiten den Grad der Wurzel ausdrücken. Welche Ziffer, der Wurzelexponent genannt wird.

Dieſes Zeichen mit ſeinen Wurzelexponenten ſetzt man vor diejenige Größe, aus welcher die Wurzel eines gewiſſen Grades, gezogen werden ſoll.

Z. B. $\sqrt[2]{\ }36$ — Quadratwurzel aus 36.

$\sqrt[3]{\ }64$ — Cubikwurzel aus 64.

Soll die Quadratwurzel extrahirt werden, ſo bleibt noch gewöhnlicher die 2, im Wurzelzeichen weg. Z. B. $\sqrt{\ }36$.

§. 23.

Gleiche Größen, bleiben ſich auch nach der Veränderung in Quadrat und Cubikzahlen ꝛc.

gleich; ſo ſind ebenfalls bey gleichen Größen, auch alle Wurzeln von gleichem Grade, einander gleich. —

Sollen Größen zu Potenzen von beſtimmten Graden erhoben werden, ſo darf man die zu erhebende Größe nur ſo vielmal durch ſich ſelbſt multipliciren, als der geforderte Grad, Einheiten enthält; z. B. 6 zur dritten Dignität erhoben, $= 6 \times 6 \times 6 = 216$; und 5 zur 2ten $= 5 \times 5 = 25$.

Wenn alſo die Wurzel ein Bruch iſt, ſo iſt auch das Quadrat, Cubus ꝛc. ein Bruch; denn durch wiederholte Addition der Größe zu ſich ſelbſt, entſtehen gerade die Potenzen. Man muß alſo Zähler und Nenner auf ſolche Art mit ſich ſelbſt verbinden. Soll daher ein Bruch zu der Potenz eines gewiſſen Grades erhoben werden, (man nennt das Erheben einer Zahl zu einer gewiſſen Potenz, auch potenziren) ſo multiplicire man den Zähler mit ſich ſelbſt, ſo vielmal, als der verlangte Grad, Einheiten enthält; und ſo desgleichen auch den Nenner. Z. B.

$\frac{2}{3}$ zur 2ten Pot. $= \frac{2 \times 2 = 4^2}{3 \times 3 = 9^2}$

$\frac{3}{4}$ in d. 2ten Pot. $= \frac{3 \times 3 = 9^2}{4 \times 4 = 16^2}$

fern. $\frac{2}{5}$ in d. 3ten Pot. $= \frac{2 \times 2 \times 2 = 8^3}{5 \times 5 \times 5 = 125^3}$

— Die zur Rechten oberhalb der Potenzzahlen geſetzte kleine Ziffern (2 u. 3) deuten den Grad der Potenz an, zu welchem die Zahl erhoben worden iſt.

Aus dieſem folgt; „daß bey Ausziehung der Wurzel aus einem Bruche, die Wurzel ſowohl aus dem Zähler als Nenner, ausgezogen werden müſſe“. Wenn die Quadrat- oder Cubikwurzel ꝛc. aus einer ganzen Zahl gefunden werden ſoll, ſo kann ſolche Wurzel nur entweder vollkommen auch in einer gleichfalls ganzen Zahl;, wenn dieſes aber nicht möglich iſt, dann auch niemals vollkommen durch irgend eine Bruchzahl ausgedrückt werden. So kann $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, niemals vollkommen, aber ſo genau gefunden werden, als es zu irgend einer Abſicht nöthig iſt.

Man ſieht, daß in $\sqrt{2}$ die Wurzel größer als 1, und doch kleiner als 2 ſeyn;, alſo die Grenze der Beſtimmung zwiſchen 1 u. 2 liegen müſſe. Solche Zahlen nun, welche ſich weder durch ganze Einheiten, noch durch Theile derſelben (das heißt Brüche) vollkommen ausdrücken laſſen, heiſſen irrationale Zahlen, alle diejenigen aber, welche eines vollkommenen Ausdrucks fähig ſind, heißen rationale Zahlen.

§. 24.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

Zur Erleichterung des Extrahirens der Wurzeln überhaupt, entwerfe man ſich eine Tabelle der Potenzen der einzelnen Zahlen von 1 — 9.

Die Nachſtehende enthält die Potenzen für Quadrat- und Cubikzahlen.

Wurzel	Quadrat	Cubus
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Aus dieſer Tabelle ſieht man, daß die Quadratzahl einer einfachen Ziffer, höchſtens 2 Ziffern, und die Cubikzahl derſelben, höchſtens 3 Ziffern, enthalten könne.

Wenn eine einfache Zahl, Nullen zur Rechten ſtehen hat, ſo beſteht ihr Quadrat aus der Quadratzahl dieſer Ziffer mit doppelt ſo vielen Nullen.

Von 20 wäre die Quadratzahl = 400.

Umgekehrt iſt aber die Wurzel aus einer ſolchen, mit einer geraden Anzahl Nullen verbundenen Quadratzahl. die Wurzel aus der vor den Nullen ſtehenden Zahl mit der Hälfte Nullen.

$\sqrt{90000} = 300$; $\sqrt{25000000} = 5000$.

Soll aus einer ganzen, höchſtens aus 2 Ziffern beſtehenden Zahl, die Quadratwurzel extrahirt werden, ſo ſuche man ſolche in der vorſtehenden Tabelle auf; zur Linken, unter der Ueberſchrift „ Wurzel; wird die geſuchte Wurzel ſtehen.

Findet ſich jene Quadratzahl aber nicht in der Tabelle, ſo iſts ein Beweis, daß ſolche nach §. 23. eine irrationale Quadratzahl, das heißt, eine ſolche Zahl ſey, deren Wurzel niemals völlig genau — ſelbſt nicht durch einen Bruch dargeſtellt werden könne. Die Wurzeln der nächſt größern und kleinern Quadratzahlen, geben die Grenze, zwiſchen welcher die Wurzel der irrationalen Zahl, liegt. Z B. $\sqrt{30}$; hier ſind 25 und 36 die näheren Quadratzahlen; 5 und 6 aber deren Wurzeln; alſo liegt die Wurzel von 30, zwiſchen 5 u. 6; ſie iſt größer als 5, kleiner als 6. — Verglichen mit dem Schluſſe des §. 23. Es kann alſo, wenn 5 oder 6, Statt der möglich zu findenden Wurzel von 30, genommen wird, der Fehler

noch nicht 1 betragen, und man wird in der Folge ſehen, daß dieſer Fehler auch noch ſo unbedeutend als es nur Wunſch ſeyn möchte, gemacht werden könne.

§. 25.

So wie die Quadratzahl einer einfachen Zahl, nicht mehr als 2 Zahlen, halten kann; — vide §. 24 — ſo kann umgekehrt jede Wurzel aus 2 Zahlen nicht mehr als eine Ziffer, oder die Wurzel aus einer geraden Anzahl Zahlen, nur aus der Hälfte der Ziffern, beſtehen. Als, z. B. aus 81, iſt die Wurzel = 9, √ aus 3600 = 60.

Dieſes giebt nun zu folgenden Regeln der Extraction Anleitung.

1. Man theile jede aus mehr als 2 Zahlen beſtehende Quadratzahl; von der Rechten zur Linken durch einen Strich in ſo genannte Claſſen von 2 zu 2 Zahlen; die erſte Claſſe kann auch nur eine Zahl enthalten.

Es ſolle z. B. √ 13456, geſucht werden, — 1|34|56|

2. Iſt die Zahl (oder ſind die Zahlen) der 1ſten Claſſe eine vollkommene Quadratzahl, ſo nehme man die, derſelben nach der Tabelle §. 24

zuſtehende Wurzel, und ſetze ſolche beſonders. Die Quadratzahl ſelbſt, ſtreiche man aber aus; als

1|34|56(1

Wäre die Zahl der 1ſten Claſſe aber eine **unvollkommene** Quadratzahl, ſo ſuche man die nächſt kleinere Quadratzahl in jener Tabelle auf, ſchreibe ſolche nach beyſtehendem Beyſpiele, nebſt deren Wurzel; und ſubtrahire dieſe Quadratzahl von jener. Z. B.

```
 8|34|2, oder    4|
 4|              8|34|2
——               4|
 4|
```

Die gefundene Wurzel duplire man (das heiſt nehme ſolche 2mal oder multiplicire ſolche mit 2) ſchreibe das Duplum oder Product von der **erſten** Zahl der nächſtfolgenden (2ten) Claſſe, von der Rechten zur Linken und dividire in die darüber ſtehende Zahlen. Der Quotient wird zu jener Wurzel geſchrieben, und übrigens ganz ſo, wie in der Diviſion verfahren.

```
Z. B.  8|34|28||          1|
       4|     ||          4|
      ——|———  ||     oder 8|1    |28
       4|34   ||          4|34
        (4)   ||           |4
       3|2    ||
      ————    ||
       1|14   ||
```

Anmerk. Der Quotient muß aber nur ſo groß genommen werden, daß der Reſt noch wenigſtens ſo groß, als die Quadratzahl des Quotienten iſt. In dieſem Beyſpiele dürfte der Quotient nicht 9 ſeyn, weil der Reſt dann kleiner als ſein Quadrat = 81, geweſen ſeyn würde.

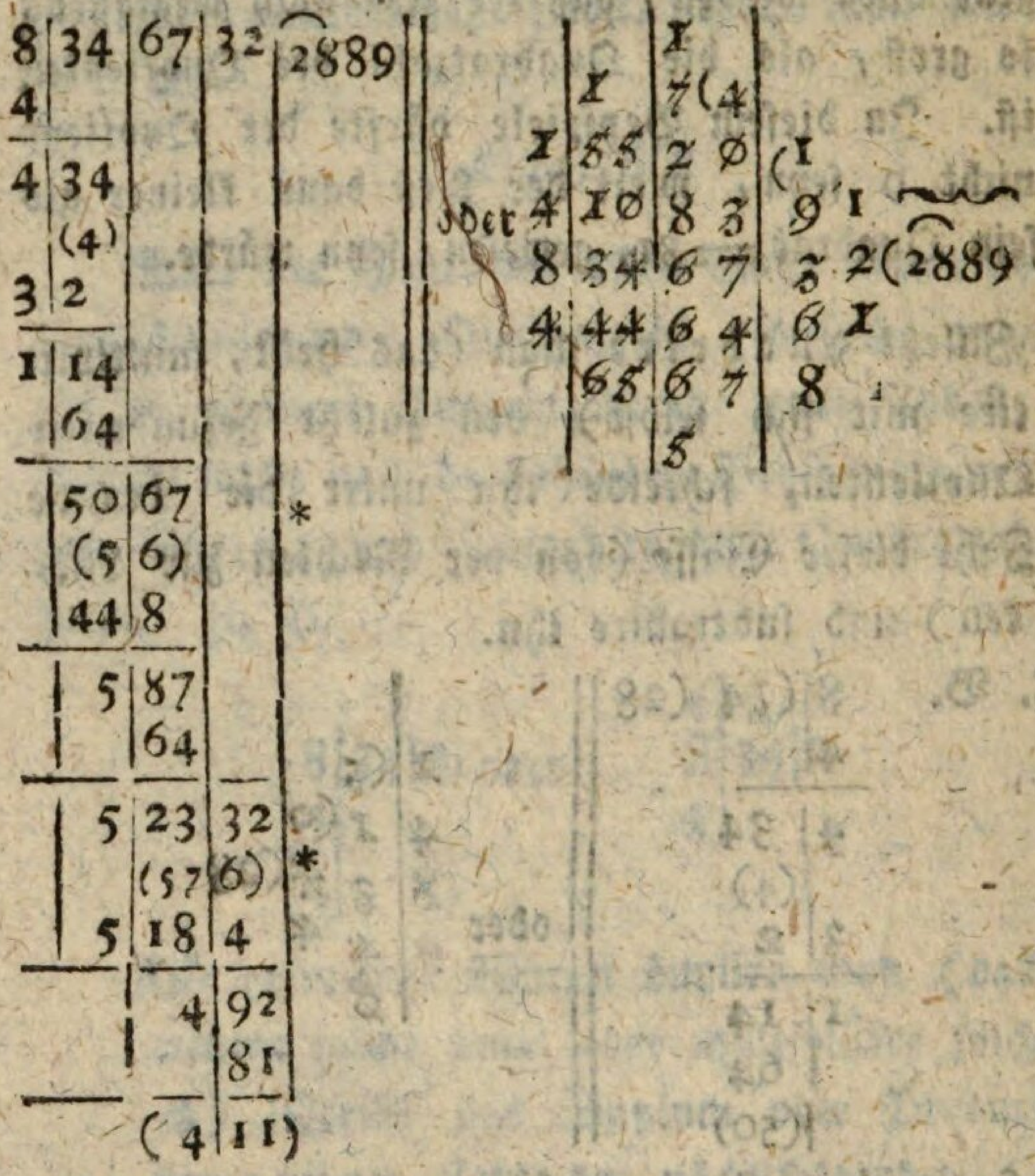
4. Zuletzt quadrire man (das heiſt, multiplicire mit ſich ſelbſt) den zuletzt gefundenen Quotienten, ſchreibe ihn unter die letzte Zahl dieſer Claſſe (von der Rechten zur Linken) und ſubtrahire ihn.

Z. B.

```
8|(34 (28    ||          |
4|           ||        1 |(5
---------    ||        4 | 1(0
4| 34        ||        8 | 3  4(28
 | (4)       ||  oder  4 | 4  4
3| 2         ||          | 6
---------    ||
1| 14        ||
 | 64        ||
 |(50)       ||
```

5. Hat eine Quadratzahl mehr als 2 Claſſen, ſo wird dieſes vorhergehende Verfahren bey jeder nachfolgenden Claſſe fortgeſetzt; nur mit dem Unterſchiede, daß wenn duplirt wird, dann alle, als Wurzeltheile gefundene Zahlen duplirt werden.

z. B.



Man wird bemerken, daß bey der 3ten Claſſe die eingeklammerte Zahl $\widehat{28}$, und bey der 4ten, die Zahl $\widehat{288}$, wie die * * zeigen, duplirt ſind, und die neuen Diviſoren wurden.

Um das Verfahren recht deutlich zu machen, ſo ſoll ſolches noch in einem Beyſpiele ausführlich beſchrieben werden.

Es ſolle $\sqrt{}$ 35670239, ausgezogen werden.

a) In Claſſen getheilt =

b) Die Zahl 35 in der Tabelle (vide §. 24) aufgeſucht, und da ſolche nicht dort ſteht, die nächſt kleinere Quadratzahl 25, genommen; ſolche unter 35 geſchrieben und ſubtrahirt; die Wurzel von 25 = 5, aber hinter den Halbkreis geſtellt.

35	76	02	39(59
25			
10	67		
(1	09)		
9	81		
	86	02	

c. Die Zahlen der 2ten Claſſe (67) zu dem vorigen Reſte heruntergeſchrieben, dann die, als den erſten Theil der Wurzel gefundene Zahl 5, duplirt, ſolche von der erſten Zahl der 2ten Claſſe zur Rechten geſchrieben und dividirt, — wobey aber ſtets, was ſub Nr. 3 dieſes §., wegen der Zahl des Quotienten geſagt iſt, berückſichtigt werden muß. Zur Erſparung der Ziffern und des Raumes, wird die jetzt gefundene Zahl (hier 9) zu den Zahlen des Diviſors geſchrieben, dieſe zuſammen in Parentheſe geſchloſſen, mit jener gefundenen Zahl (hier nemlich 9) die ſämmtlichen Zahlen der Parentheſe multiplicirt, das Product ſubtrahirt, und die Zahlen der 3ten Claſſe heruntergeſchrieben.

c. Die gefundenen Wurzelzahlen, 59, werden nun duplirt, (und können oben ſeine Klammer erhalten, $\overset{\frown}{59}$) das Duplum oder Product als der Diviſor zu dieſer Claſſe, von der erſten Zahl derſelben rückwärts geſchrieben; dann wie gewöhnlich dividirt, das heißt einen Quotienten ge-

ſucht: Dieſer Quotient zur Rechten des Diviſors und zu den ſchon gefundenen Wurzelzahlen (59) geſchrieben, ſo erhält man (1187) und (597 Dieſe Zahlen wie vorhin bey d mit dem ſo eben gefundenen und zu dem Wurzelzeichen geſchriebenen Quotienten (hier 7) multiplicirt, das Product — wie dort — ſubtrahirt, und zum Reſte die Zahlen der nächſtfolgenden Claſſe heruntergeſetzt — wie dieſes alles in nächſtſtehender Fortſetzung des ſub b, angefangenen Beyſpiels, zu erſehen iſt.

35	67	02	39 (597
25			
10	67		
(1	09)		
9	81		
	86	02	
	(11	87)	
	83	09	
	2	93	39

d. Bey dieſer 4ten Claſſe wird gerade wie bey c mit der 3ten Claſſe verfahren, nur mit dem Unterſchiede, daß jetzt 3 Zahlen zu dupliren ſind, (597) und auf eine ähnliche Art würde man bey der 5ten, 6ten, 7ten ꝛc. Claſſe verfahren.

Dieſes Beyſpiel würde völlig gerechnet, alſo

ſtehen;

35	67	02	39 (5972
25			
10	67		
(1	09)		
9	81		
	86	02	
	(11	87)	
	83	09	
	2	93	39
	(1	19	42)
	2	38	84
		54	55

In der erſten Anweiſung dieſes §. ſub Nr. 1. und 2, iſt die Extraction der Wurzel aus ein und derſelben Quadratzahl, auf 2erley Art gezeigt worden. Da nun die, ſub a. b. c. d. nicht berührte Art der Ausziehung mehr Kürze und Papierraum gewährt, ſo will ich das eben berechnete Beyſpiel, zur beſſeren Einſicht, Claſſe nach Claſſe herſetzen.

1ſte Claſſe,

10			
~~35~~	67	02	39 (5
~~25~~			

2te Claſſe.

~~1Ø~~	(8	(6		
~~35~~	~~6~~	~~7~~	02	39 (59
~~25~~	~~Ø~~	~~1~~		
~~1~~	8			

3te Claſſe.

	(2		
	3		
1	19	(9	
10	86	4(3	
35	67	02	39(597
25	01	89	
1	81	4	
	1		

4te Claſſe.

	2	(5	
	3	7(4	
1	19	95	
10	86	43	(5(5
35	67	02	39(5972
25	01	89	44
1	81	49	
	11	1	

Daß dieſe letzte Methode in jeder Rückſicht ſehr abkürzend gegen die erſtere Allgemeine ſey, wird von ſelbſt einleuchten, und ſich daher auch von ſelbſt empfehlen.

§. 26.

Die Quadratwurzel aus einem gegebenen Bruche auszuziehen.

Man verwandle den Bruch in einen Decimalbruch mit einer geraden Anzahl Decimalſtellen, (welches bekanntlich durch Anhängung der Nullen, ſehr leicht iſt) und extrahire dann wie vorhin bey den ganzen Zahlen. Die Wurzel erhält halb ſo viel Decimalſtellen, als der verwandelte Bruch hatte. Zur Erläuterung Folgendes.

Beyſpiel: $\sqrt{\frac{3}{4}}$. 300 | 0.75; alſo $\frac{3}{4} = 0.75$ (2 über 3; 44 darunter)

0.75 | 0.8; $\sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8$
64
11

```
       22222|
√ 2/3 · 20000|0 6667. — √0.66 67(0. 81 iſt d. W.
       33333|
                          64
                        ----
                           2 67
                           1 61
                        ---------
                           1 06
```

Anmerkung. Wie man den, bey unvollkommenen Quadratzahlen übrig bleibenden Reſt ſchätzen und weiter behandeln köune, wird in der Folge gezeigt werden.

§. 27.

Aus unvollkommnen Quadratzahlen, die Wurzel dutch Näherung ſo genau als verlangt wird, zu finden.

a, Man hänge der gegebenen Zahl eine willkührliche gerade Anzahl Nullen an, und bemerke dieſe Stelle mit einem Decimalpu.kte; ſo wird die ganze Zahl dadurch in einen Decimalbruch verwandelt (deſſen Nenner 1 mit ſo vielen Nullen als angehängt ſind) und an Werthe unverändert bleiben.

b, Aus dieſer Zahl ziehe man ohne Berückſichtigung des Theilzeichens, die Quadratwurzel, und ſchneide von ſolcher für die Decimalſtellen halb ſo viel Ziffern von der Rechten zur Linken ab, als Nullen angehängt waren; ſo ergeben ſich die Bruchtheilchen von dem verlangten Grade der Genauigkeit.

z. B. √ 314. 3|14 | 00 |00|00|00(17.72
1| ..
2|14 | ..
(27) | ..
1|89 | ..
25 | 00
(3 | 47)
24 | 29
71 | 00
(35 | 42
70 | 84
(| 16 | 00) Reſt

§. 28.

Nicht allein bey ganzen Zahlen, ſondern auch bei Brüchen und gemiſchten Zahlen, kann man jene Methode, durch Näherung die Quadratwurzel auszuziehen, anwenden. Die gegebenen Zahlen werden in einen Decimalbruch verwandelt, deſſen Decimalſtellen entweder an ſich ſchon gerade ſind, oder gerade gemacht werden müſſen, an welche dann eine beliebige Anzahl von Nullenpaaren gehängt, und von den durch die Extraction erhaltenen Wurzelzahlen, ſo viele Decimalſtellen abgeſchnitten werden, als NB Nullenpaare angehängt worden ſind. z. B.

√ 17.2811 — 17|28|11|0000(415.70 (Bleibt ein
* Reſt, 451.)

Die Probe der Richtigkeit der Wurzelextraction

iſt folgende. Man multiplicire die gefundenen Wurzelzahlen mit ſich ſelbſt, und addire den Reſt; ſo muß die Quadratzahl wieder herauskommen.

Die Probe ſoll auf das ſo eben berechnete Beyſpiel angewandt werden.

```
    41570
    41570
  -------
   2909900
  20785(1
  4157(5
 16628(4
 ---------
 17281 1 0000   wie bey *
```

§. 29.

Auszziehung der Cubikwurzel.

Da dieſe Wurzelextraction mit der ſo eben erläuterten im Verfahren ſehr viel Aehnliches hat, ſo ſollen blos die Regeln der Auszlehung mit den nöthigen Beyſpielen begleitet, hier mitgetheilt werden.

Regeln.

a. Theile man die gegebene Cubikzahl, von der Rechten zur Linken in Claſſen, davon jede — ausgenommen die erſte — drey Ziffern haben muß.

b. Enthält die erſte Claſſe eine vollkommene Cubikzahl (welches die vorſtehende Tabelle §. 24 ergiebt, ſo ſetze man die Wurzel derſelben an einen ſchicklichen Ort, und ſtreiche die Zahlen der 1ſten Claſſe aus.

Im entgegengeſetzten Falle, nehme man die nächſtkleinere Cubikzahl, ſubtrahire ſolche, und ſetze deren Wurzel wie vorhin, beſonders.

Dieſe gefundene 1ſte Zahl der Wurzel quadrire

man, triplire (das heißt, multiplicire mit 3) daſſelbe, ſchreibe das daher entſtehende Product von der 1ſten Zahl der nächſten Claſſe zur Rechten, und dividire. (NB. auch hier — und zwar vorzüglich, muß man ſich vorſehen — daß der Quotient nicht ſo groß genommen wird, daß die in dieſer Claſſe noch vorzunehmende Subtraction unmöglich werde —) Der gefundene Quotient wird zu der 1ſten Zahl der Wurzel geſchrieben.

d. Der ſo eben gefundenen letzten Zahl ihr Quadrat, multiplicire man mit der vorhergehenden Zahl, triplire das Product, ſchreibe das daher entſtehende Triplat von der mittlern Zahl derſelben Claſſe Links.

e. Endlich ſetze man dieſer letztern Wurzelzahl ihren Cubum unter die letzte Zahlſtelle dieſer Claſſe, addire dann die 3 übereinander ſtehenden Producte, und ſubtrahire ihre Summen von der Cubikzahl.

Bey der Auszziehung aus mehrern Claſſen, verfährt man gerade eben ſo; bey jeder neuen Claſſe, macht man mit dem Gebrauche der Regel c, den Anfang, und zieht, zur beſſeren Bemerkung der zuſammengehörigen Zahlen, eine Clammer über die in jeder Claſſe gefundenen Zahlen; bey jeder nachfolgenden Claſſe, werden die ſämmtlichen ſchon gefundenen Ziffern, als der 1ſte Theil der Wurzel angeſehen, alſo zuſammen quadrirt ꝛc. Folgende Beyſpiele erläutern Alles.

$\sqrt[3]{1728}$.

```
 1 | 728 (12  ||        | 1
 1 |          ||      1 | 728 (12
---           ||      1 | 328
 0 | 728      ||  oder  | 1
   (3)        ||
    6         ||
   12         ||
    8         ||
  ----        ||
   728        ||
  ----        ||
    0         ||
```

```
∛183 | 657 | 238 | 899 | (5684
 125 |
 ----
  58 | 657           5            6 6 = 36       6 6 = 36
 (7  | 5)            5                  5               6
  45 | 0            --                ---             -----
   5 | 40           25                180             (216)
     | 216           3                  3
 ----              ---               -----
  50 | 616         (75)              (540)
 ----  ----  ----
   8 | 041 | 238      56.56 = 3136 | 8.8 = 64  | 8.8 = 64
   ( | 940 | 8)                  3 |       56  |        8
   7 | 526 | 4            -------- |     ----  |    -----
     | 107 | 52           (9408)   |      384  |    (512)
     |   5 | 512                   |     320   |
 ----  ----  ----  ----            |    -----  |
   7 | 634   432                   |     3584  |
 ----  ----  ----  ----            |        3  |
     | 406   806 | 899             |   (10752) |
     | (96   787 | 2)
     | 387   148 | 8          568 | 4.4 = 16   | 4.4 = 16
     |   2   272 | 64         568 |      568   |        4
     |           | 64        -----|       16   |    -----
 ----  ----------  ----      4544 |    -----   |       64
 ----| 387   421 | 504      3408  |     3408   |
     |  19   385   395     2840   |     568    |
                           ------ |    -----   |
                           322624 |     9088   |
                                3 |        3   |
                          ------- |    -----   |
                         (967872) |  (27264)   |
```

Vergleicht man die hier ausführlich mitgetheilte Berechnung mit den angegebenen Regeln, ſo wird das ganze Verfahren ſehr deutlich werden.

§. 30.

Alles was bey dem Quadratwurzel-Ausziehen über Ausziehen aus Brüchen, Näherung ꝛc. geſagt iſt, gilt auch (mit einigen unbedeutenden und von ſelbſt einleuchtenden Abänderungen) hier.

Soll die Wurzel aus dem Reſte oder aus Decimalbrüchen durch Näherung genauer geſucht werden, ſo ſetzt man ſtets 3 zu 3 Nullen zugleich an, und extrahirt wie ſonſt.

Z. B. $\sqrt[3]{1729}$.

```
1|729|000  (12.002
1(2)  *
   4
  12
   8
 728
    1|000 000 000
        432 000 000
        864 000 000
             14 400
                  8
        864 144 008
        135 855 992
```

Hier ſind, — da 1729 eine unvollkommene Cubikzahl war, ſogleich beym * 3 Nullen angehängt; dann nach der Extraction aus dieſen, dadurch erhaltenen 3 Claſſen, dem gebliebenen Reſte = 1000 nun wieder 3 Nul-

len angehängt, und da die Wurzel noch genauer gefunden werden ſollte, dem Reſte dieſer 4ten Claſſe noch 3 Nullen; und ſo hätte man noch weiter extrahiren können.

§. 31.

Probe, für die Cubikwurzel-Ausziehung.

Hier gilt gewiſſermaßen dieſelbe Regel, wie bey der Quadratwurzel. Man cubire, das heißt, erhebe die gefundene Wurzel in den Cubus, und addire den beym Extrahiren etwa übrig gebliebenen Reſt, ſo muß die Cubikzahl wieder herauskommen. Obiges Beyſpiel werde geprobt.

```
      12002
      12002
    ---------
      24004
    24004
  12002
  -------------
  144048004
      12002
  -------------
  288096008
 288096008
144048004
------------------
1728864144008
  135855992 Reſt
------------------
1729000000000 Probe.
```

Auf eine minder ſcharfe aber ſchnellere und in-

den gewöhnlichen Fällen zureichende Art, kann man die Probe für die Quadratwurzel = Extraction, auch folgendermaßen anſtellen.

Der Reſt darf nemlich nicht ſo groß, als die mit 2 multiplicirte und um 1 vermehrte Wurzel ſich zeigt, ſeyn; findet ſich dieſes, ſo hat man wenigſtens die richtige Wurzelzahlen; im Gegentheile iſt aber gefehlt. Z. B.

$\sqrt{143} = 1$	43	11 die Wurzel; Reſt 22; alſo
1	21	$11.2 = 22$, $22 + 1 = 23$. Da
	22	$23 > 22$, ſo iſt richtig extrahirt.

$\sqrt{1728110000} = 41570$; Reſt 45100
$41570.2 = 83140$
$+1$
83141

83141 > 45100 alſo richtig extrahirt.

4) Proportions-Rechnung;

und zwar

a. die Theorie des Unentbehrlichſten über Verhältniſſe und Proportionen.

b. die Anwendung dieſer Lehren für die Proportions-Rechnung ſelbſt.

---

§. 32.

Das Vergleichungsmaß zwiſchen zwey Größen, nennt man das Verhältniß derſelben.

Werden zwey Zahlen entweder durch Subtraction oder Diviſion mit einander verglichen, ſo ſagt man, man ſuche (oder finde) — durch die Hülfe der Subtraction — das arithmetiſche-, — durch die Hülfe der Diviſion — das geometriſche Verhältniß zwiſchen ſolchen auf.

Das Zeichen — oder ÷, iſt das Zeichen des arithmetiſchen-,

— ; — :, das Zeichen des geometriſchen Verhältniſſes. Bey dem arithmetiſchen Ver-

hältniſſe, wird durch die Subtraction das Umwie- viel., bey dem geometriſchen Verhältniſſe, durch die Diviſion aber das Wievielmal eine Größe nemlich größer als die andere ſey ausgemittelt.

Differenz und Quotient, welche das Verhältniß zweyer Größen bezeichnen, nennt man beyde, Verhältnißnamen. Der Quotient, wird noch beſonders der Exponent des Verhältniſſes genannt; er giebt die Größe des geometriſchen Verhältniſſes an, und kann ſowohl ein Bruch als eine ganze Zahl ſeyn, nachdem die eine Zahl in der andern ein oder etlichemal ganz, oder nur ein Theil davon in der andern, ein, oder etlichemale, enthalten iſt. Z. B.

In 12 : 3, iſt der Exponent = 4; desgleichen in 16 : 4 = 4; in 24 : 32. der Exponent = $\frac{4}{3}$.

Denn, ſo wie man in dem vorhergehenden durch die Diviſion der 3 in 12, und der 4 in 16, den Quotienten oder Exponenten erhielt, ſo auch hier 32 dividirt durch 24 = $\frac{32}{24}$ = $1\frac{1}{3}$ oder = $\frac{4}{3}$. Multiplicirt man dieſen Exponent $\frac{4}{3}$ nun in das vorhergehende Glied 24, ſo ergiebt ſich nachfolgende 32. Als

$$24 \cdot \tfrac{4}{3} = \tfrac{96}{3} \,|\, 32.$$

§. 33.

Die Zahlen, welche ein Verhältniß ausmachen, heißen Glieder des Verhältniſſes.

4—8 ; oder 6:3
Glieder   Glieder

Die erſten Zahlen (hier 4 und 6) heißen die vordern Glieder, die letzten Zahlen (hier 8 und 3) — aber die hintern Glieder.

Steht vorn im Verhältniſſe die kleinere; hinten aber die größere Zahl, ſo heißt ſolches ein abnehmendes; umgekehrt aber ein zunehmendes Verhältniß, z. B.

4—8, 3—13, 4:6, 3:5 | 4 : 2, 6:4
zunehmende oder wachſende ; | abnehm. Verh.

§. 34.

Wenn die Glieder der geometriſchen Verhältniſſe, durch einerley Zahlen multiplicirt oder dividirt werden, ſo bleiben die Verhältniſſe an ſich unverändert. Die Diviſion der Verhältnißzahlen gewährt außerordentliche Abkürzungen im Rechnen, und eine viel deutlichere Ueberſicht der Verhältniſſe ſelbſt.

So iſt z. B. 3:4 einerley mit dem von 36:48, und doch viel leichter zu beurtheilen; desgleichen 12:48 durch 1:4 ꝛc.

Auch dann, wenn ein oder beyde Glieder Brüche ſind, ſo laſſen ſich doch ſolche, wenn man dieſelben auf einerley Benennung bringt, in ganzen Zahlen darſtellen.

z. B. $3 : \frac{4}{5}) \frac{15}{5} : \frac{4}{5} = 15 : 4$; oder

$\frac{2}{3} : \frac{3}{4}) 2.4 = 8, 3.3 = 9$; alſo $\frac{8 : 9}{12} = 8 : 9$ ꝛc.

Will man 2 Verhältniſſe ſehr genau mit einander vergleichen, ſo dividire man jedes durch ſein eigenes 1ſtes Glied; den, bey der Diviſion des 2ten Gliedes etwa übrig bleibenden Reſt, ſuche man durch einen Decimalbruch auszudrücken und vergleiche dann die Decimalſtellen.

Es ſollen z. B. 7 : 22, und 100 : 314 (welches beſonders für die Stereometrie oder Körpermeſſung, ſehr wichtige Verhältniſſe ſind) mit einander verglichen werden;

$$\begin{array}{lll} & 7 : 22 | & \\ 7) & 1 : 3\frac{1}{7} & = 1 : 3'142857 \\ & 100 : 314 | & \\ 100) & 1 : 3\frac{14}{100} & = 1 : 3'140000.) \end{array}$$

Nach den Decimalſtellen wird man ſich nun überzeugen; daß 7 : 22 das größere, 100 : 314, das kleinere Verhältniß ſey.

§. 35.

Haben 2 Verhältniſſe gleiche Verhältnißnamen, ſo ſagt man, „ſie ſtehen mit einander in Proportion“. Da dieſes nun in beyden Arten der Verhältniſſe Statt finden kann, ſo hat man auch arithmetiſche und geometriſche Proportionen;

nemlich 2 gleiche arithmetiſche Verhältniſſe bilden eine arithmetiſche, und 2 gleiche geometriſche Verhältniſſe, eine geometriſche Proportion.

— Zwiſchen die Verhältniſſe wird das Zeichen der Gleichheit geſetzt, =.

4—6, 3—5 geben die arithm. Prop., 4—6=3—5
6:12, 4:8 — — geometr. — 6:12=4:8

Das erſte und dritte Glied } heiß. die gleichnam.
— zweyte u. vierte — }
Das erſte u. vierte — } heiß. d. äuß. } Glieder.
— zweyte u. dritte — } — die mitt. }
Zunehmende Verh. bilden zunehm. } Proport.
abnehm. Verhältniſſe aber abnehm. }

Iſt das erſte Verhältniß einer Proportion zunehmend, ſo muß das zweyte Verhältniß auch zunehmend geſtellt werden, und umgekehrt. —

Der Ausdruck der Proportionen wird folgendermaßen geleſen:

„So wie ſich das erſte Glied zum zweyten verhält, ſo verhält ſich das dritte zum vierten. Das heißt, durch ein Beyſpiel 4:16=8:32 erläutert; ſo vielmal das erſte Glied 4 in 16 enthalten iſt, ſo vielmal iſt auch 8 in 32 enthalten.“

Sind die beyden mittlern Glieder der Proportion, gleich; ſo nennt man ſolche eine ſtäte, zuſammenhängende, im Gegentheile, eine unſtäte, diverſe Proportion.

§. 36.

In jeder arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der beyden mittlern=, und in jeder geometriſchen Proportion iſt das Product der beyden mittlern Glieder gleich der Summe oder dem Producte der beyden äußern Glieder. z. B.

2 — 3 = 4 — 5 ⎫ und 4 : 6 = 8 : 12
· · · 7 · · · ⎬ · · · 48 · · ·
· · · 7 · · · ⎭ · · · 48 · · ·

Aus dem bisher Mitgetheilten iſt nun ſehr leicht zu erſehen,

„daß man bey beyden Arten der Proportionen, bloß die gleichnamigen vorhergehenden oder nachfolgenden Glieder nebſt der Differenz oder den Exponenten zu kennen braucht, um aus ſolchen die fehlenden Glieder aufzufinden.“

a. Für die arithmethiſche Proportion.

Aus 6, 9 und der Differenz 7, ſolle eine Proportion gebildet und die fehlenden Glieder beſtimmt werden.

6 — = 9 —) 6 + 7 = 13 u. 9 + 7 = 16, giebt
6 — 13 = 9 — 16
· · · 22 · · ·
· · · 22 · · ·

Man ſchreibt die gegebenen Verhältnißzahlen in ihre Stellen, addirt die gegebene Differenz zu jeder dieſer Zahlen und ſetzt die Summen in die leeren Stellen; wie das vorſtehende Beyſpiel zeigt — denn jedes Verhältniß ſoll ja hier Zahlen oder Glieder enthalten, welche um 7 differiren.

b. Für die geometriſche Proportion.

Aus 12, 13, und dem Exponent 3, ſolle eine Proportion und die fehlenden Glieder gebildet und beſtimmt werden.

12 :) = 13 :) 12.3 = 36, und 13.3 = 39; alſo
12 : 36 = 13 : 39
. . . 468 . . .
. . . 468 . . .

Hier wird jede gegebene Verhältnißzahl mit dem Exponenten multiplicirt, und das Product in die zugehörige Stelle geſchrieben. — Denn jedes Verhältniß der hier aufgegebenen Proportion ſoll ja aus Gliedern beſtehen, deren Exponent = 3, das heißt, aus Zahlen, deren eine in der andern 3 mal enthalten iſt.

§. 37.

Für die Richtigkeit des Proportions-Anſatzes ergeben ſich aus dem Vorhergehenden folgende Merkmale:

a. Gleichheit der Differenzen der Verhältniſſe. b. Gleichheit der Summen der äußern und mittlern Glieder.	in arithmet. Proportionen.
a. Gleichheit der Exponenten der Verhältniſſe. b. Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder.	in geometr. Proportionen.

§. 38.

Iſt die Differenz oder der Quotient nicht beſtimmt worden, ſondern nur 2 oder 3 Verhältnißzahlen oder Glieder gegeben, aus denen eine Proportion gebildet werden ſoll, ſo wird zur Verſtändigung des Verfahrens, Folgendes erinnert werden müſſen.

Daß nemlich die Addition und Subtraction, ſo wie die Multiplication und Diviſion, einander entgegengeſetzte Rechnungsarten ſind, einander wechſelſeitig ihre Zahlgrößen hervorbringen. Als z. B.

$4 + 3$ giebt 7 und $7 - 3$ giebt 4

$4 \,.\, 3$ giebt 12, und $12 : 3$ giebt 4.

Wendet man dieſe Betrachtungen, verbunden mit denen in dem vorhergehenden §. aufgeſtellten Merkmalen von der Richtigkeit eines Proportions-Anſatzes an, ſo wird die Bildung einer Proportion,

wenn auch nur 2 oder 3 Glieder gegeben ſind, ſich leicht entwickeln.

a. Für die arithmetiſche Proportion.

Es ſey gegeben, 6 und 8; für dieſen Fall von 2 gegebenen Gliedern, iſt nur die Bildung einer ſtäten Proportion möglich; das heißt (nach §. 35) wo die beyden mittlern Glieder einander gleich ſind. Man ſetze daher — wenn nicht beſtimmt iſt, ob 6 oder 8 das erſte Glied ſeyn ſolle — willkürlich eine dieſer Zahlen in die erſte oder letzte Zahlſtelle, und die andere Zahl in die 2te und 3te zu mittlern Gliedern, oder umgekehrt, wie man will, und behalte nur den erſten Satz des 36 §., „daß die Summe der beyden mittlern Glieder gleich ſey der Summe der äuſern Glieder; ſo wird man nie bey 2 gegebenen Gliedern zur Auffindung der beyden übrigen, in Verlegenheit kommen. Die beyden mittlern Glieder um das erſte vermindert, geben das 4te, und wenn die 2 gegebenen Glieder die beyden äuſern bilden, als 6 — = — 8, ſo giebt ihre Summe dividirt durch 2, die beyden mittlern Glieder; nemlich:

$$6+8=14,\ \frac{14}{2}=7;\ 6-7=7-8.$$

Ferner:

6—8=8*) 6—8 = 8—10 | oder 8—6=6) 8—6=6—4

..16.. ..12..

..16.. ..12..

Wäre 3, 5, 7 gegeben, — alſo 3 Glieder — ſo addire man die ganz willkürlich hinzuſtellenden mittlern oder äußeren Glieder zuſammen, und ſubtrahire von der Summe, das 3te gegebene Glied; der Reſt iſt das geſuchte vierte Glied.

3—5=7 *) 5+7=12, 12—3=9, alſo 3—5=7—9
: .12. :
. . 12. . .

Oder

5—3=7 *) 3+7=10, 10—5=5, alſo 5—3=7—5

Oder

3—7=5—*) 3—7=5—9; od. 7—5=3—) 7—5=3—1.

Oder

5—7=3—*) 5—7=3—5; od. 7—3=5 *) 7—3=5—1.

Auch

—7=3—5 } 3—=5—7 5—3=*—7
5—7=3—5 } 3—5=5—7 5—3=9—7

und ſo kann man bey jeder Stellung der Glieder die richtige Proportion finden.

b. Für die geometriſche Proportion.

Es ſind 8, 4, 3, als Gliedrr gegeben; und ſoll das 4te Glied gefunden werden.

Man ſtelle auch hier (wenn nicht anders eine Stelle für eins dieſer Glieder beſtimmt iſt —) die gegebenen Zahlen der Glieder willkürlich, und erinnere ſich nur, „daß die Producte der mittlern Glieder gleich ſind dem, der äußern, und umgekehrt —; ſo wird man zur Auffindung des fehlenden mit * zu bezeichnenden Gliedes, das Ver-

ſahren leicht abſtrahiren, daß man nemlich 2 der gegebenen, nun entweder in der Mitte oder außen ſtehenden Glieder, mit einander multipliciren und das Product durch das gegebene 3te Glied dividiren müſſe, der Quotient giebt das geſuchte 4te Glied.

Alſo, 8 : 4 = 3 : *	4.3 = 12, 12: 8 = $1\frac{4}{8}$	8:4 = 3:$1\frac{4}{8}$) α
oder, 4 : 8 = 3 : *	8.3 = 24, 24: 4 = 6	4:8 = 3: 6) β
oder, 3 : 8 = 4 : *	8.4 = 32, 32: 3 = $10\frac{2}{3}$	3:8 = 4:$10\frac{2}{3}$
oder, 3 : 4 = 8 : *	4.8 = 32, 32: 3 = $10\frac{2}{3}$	3:8 = 4:$10\frac{2}{3}$
oder, 8 : 3 = 4 : *	3.4 = 12, 12: 8 = $1\frac{4}{8}$	8:3 = 4: $1\frac{4}{8}$
oder, 4 : 3 = 8 : *	3.8 = 24, 24: 4 = 6.	4:3 = 8: 6
oder, 4 : * = 8 : 3	3.4 = 12, 12: 8 = $1\frac{4}{8}$	4:$1\frac{4}{8}$ = 8:3
oder, * : 4 = 3 : 8	3.4 = 12, 12: 8 = $1\frac{4}{8}$	$1\frac{4}{8}$:4 = 3:8
oder, 8 : 3 = * : 4	8.4 = 32, 32: 3 = $10\frac{2}{3}$	8:3 = $10\frac{2}{3}$:4
oder, 4 : 3 = * : 8	4.8 = 32, 32: 3 = $10\frac{2}{3}$	4:3 = $10\frac{2}{3}$:8

und ſo weiter. —

Man ſieht alſo deutlich, daß es gleich viel ſey, welches Glied der Proportion, ob das 1ſte, 2te, 3te oder 4te fehle; daß jedes auf dieſe Art gefunden werden könne, und daß die willkührliche Stellung der Glieder, der Richtigkeit der Proportionen nicht ſchade; wohl aber daß durch die Umſtellung der Glieder andere Proportionen entſtehen; wie unter andern die erſten beyden Proportions-Anſätze, α und β, zeigen.

Sind nur 2 Glieder zur Bildung einer Proportion gegeben, ſo ſtelle man ſolche als die beyden äußern, oder mittlern Glieder, in Anſatz; multiplicire ſolche in einander und zerlege das Product in 2 Factoren (wenn man diejenigen, aus welchen ſolches

zuſammengeſetzt iſt, nemlich die gegebenen Glieder, nicht nehmen will,) und ſtelle dieſe Factoren nach den Erforderniſſen der Merkmale einer ab- oder zunehmenden Proportion. Z. B.

Es ſollen 4 u. 9 gegeben ſeyn. Alſo

4 : * = * : 9) 4.9 = 36, 36 beſteht aus den Factoren, 18.2, 3.12, 6.6,

oder * : 4 = 9 : *) welches alſo ſämmtlich Glieder der Proportionen werden können. Als:

4 : 18 = 2 : 9 ⎫ Hier ſind einleuchtend die Pro-
3 : 4 = 9 : 12 ⎬ portionen nicht allein richtig,
6 : 9 = 4 : 6 ⎭ ſondern auch gleich.

Iſt es willkührlich oder vorgeſchrieben, daß man eine ſtäte Proportion bilden kann oder muß; ſo nimmt man die 2 gegebenen Glieder als äußere an, extrahirt aus ihrem Producte die Quadratwurzel, und ſetzt ſolche als die 2 mittlern Glieder.

Wir nehmen obige Glieder 4 u. 9; 4.9 = 36, und $\sqrt{36} = 6$ alſo 4 : 6 = 6 : 9.

Iſt das erſte und dritte oder zweyte und vierte Glied gegeben, ſo iſt eine ſtäte Proportion nach der Kenntniß des vorausgeſchickten, leicht gebildet.

Es ſey 4 und 6, als 1ſtes und 3tes Glied gegeben, ſo ergiebt ſich das 2te Glied ſchon von ſelbſt, da man die mittlern Glieder ja nur gleich ſetzen darf, alſo 4 : 6 = 6 : * ꝛc.

Aus dieſen Grundſätzen der Proportionen, finden nun vorzüglich folgende Puncte im Geſchäftsleben ꝛc. Anwendung;

1. Zu 2 — 3 — 4 ꝛc. Zahlen oder Zahlgrößen, die mittlere arithmetiſche Zahl oder Werth zu finden.

2. Zu 3 gegebenen Zahlen die 4te geometriſche Proportional-Zahl zu finden — woraus die Ausübung der ſo bekannten Regel de tri beſteht.

3. Zu 2 gegebenen Zahlen, die mittlere geometriſche Proportional-Zahl zu finden.

Da die practiſche Anwendung von Nr. 1. und Nr. 3, in wenigen Worten gezeigt werden kann, ſo mag ſolche auch hier gleich folgen.

Ad. 1.

Es haben auf einem gewiſſen Diſtricte 20 Leute Bäume gepflanzt; den erſten Tag $23\frac{1}{2}$ Schock, den 2ten $23\frac{1}{4}$ Schock, den 3ten 23 Schock, den 4ten nur $22\frac{1}{4}$ Schock; wie viel Schock kann man annehmen, daß unter gleichen Umſtänden, an Fleiß Aufwand und Boden ꝛc. in einem Tage gepflanzt werden können.

Man addire die gepflanzte Schockzahl zuſammen, und dividire in die Summe mit der Zahl der Tage; als:

$23\frac{1}{2}$		
$23\frac{1}{4}$	1	
23	92	23
$22\frac{1}{4}$	44	

92 Schock, dieſe durch die Zahl der Tage dividirt, giebt für 1 Tag 23 Schock als Mittelzahl.

Ein Pacht-Guth hat in einem Zeitraume von 6 Jahren folgenden diverſen Ertrag gegeben.

Das 1ſte Jahr 3232, das 2te Jahr 4309, das 3te 5602, das 4te 3802, das 5te 3103, das 6te 3012 Rth.

Wie hoch kann man den mittlern Ertrag für 1 Jahr beſtimmen?

1ſtes Jahr		3232 rth.	23060 Rthlr. dividirt durch 6, als Zahl der Jahre, giebt $3843\frac{1}{3}$ Rthl. für den Ertrag eines Jahres.
2tes	—	4309 rth.	
3tes	—	5602 rth.	
4tes	—	3802 rth.	
5tes	—	3103 rth.	
6tes	—	3012 rth.	
		23060 rth.	

Ad 3.

Man ſoll zu 2 gegebenen Zahlen z. B. 4 und 16, eine mittlere geometriſche Proportionalzahl finden, das heißt eine Zahl, welche mit jedem dieſer gegebenen Glieder ein gleiches geometriſches Verhältniß bildet.

Der Fall iſt ſchon — wiewohl nur in andern Worten — erklärt worden. Aus dem Producte die-

ſer beyden gegebenen äuſern Glieder, extrahire man nemlich die Quadratwurzel; die gefundene Wurzel, iſt die geſuchte Zahl; hier $= \sqrt{4.16} = \sqrt{64} = 8$

Denn 4 : 8 = 8 : 16, die Exponenten ſind gleich also auch die Verhältniſſe; und die Proportion ſo wie die geſuchte Zahl, iſt richtig gefunden. —

§. 39.

Etwas über zuſammengeſetzte Verhältniſſe und Proportionen.

So wie die Verhältniſſe und Proportionen bis daher aufgeſtellt worden ſind, nennt man ſolche einfache. — Es können aber auch

a. zuſammengeſetzte Verhältniſſe entſtehen, „wenn nemlich die vordern und hintern, oder beſtimmter, die gleichnamigen Glieder (vide §. 33 und 35) zweyer oder mehrerer Verhältniſſe in einander multiplicirt werden. Das zwiſchen den daher entſtehenden Producten Statt findende Verhältniß, heißt nun ein zuſammengeſetztes Verhältniß.“ Z. B.

1.2.3 : 4.5.6, oder die Verhältniſſe 1 : 4, 2 : 5, 3 : 6

geben $\begin{cases} 1 : 4 \\ 2 : 5 \\ 3 : 6 \end{cases}$

6 : 120 als zuſammengeſetztes Verhält.

Anmerk. Man kann die Vorderglieder, als Factoren der Productenzahl des Vordergliedes, ſo wie die Hinterglieder als Factoren der Productenzahl des Hinter-Gliedes des zuſammengeſetzten Verhältniſſes, anſehen (1.2.3, Factoren von 6, und 4.5.6, Factoren von 120.)

Not. Auch dieſe Verhältniſſe können durch die Diviſion verkleinert dargeſtellt werden; obiges durch,

$$6 : 120$$
$$6)\ 1 : 20$$

b. zuſammengeſetzte Proportionen entſtehen, wenn die gleichnamigen Glieder von zweyen oder mehrern Proportionen in einander multiplicirt oder dividirt werden. Z. B.

$$8:4 = 10:5$$
$$3:2 = 6:4$$
$$24:8 = 60:20 \quad \text{multipl.} \qquad \frac{8}{3} : \frac{4}{2} = \frac{10}{6} : \frac{5}{4} \quad \text{divid.}$$
$$\cdots 480 \cdots$$
$$\cdots 480 \cdots$$

Oder,
$$4:2 = 6:3$$
$$6:4 = 9:6$$
$$3:6 = 4:8$$
$$2:8 = 5:20$$
$$144:384 = 1080:2880$$

Es braucht hier keiner weitern Erinnerung, daß auch bey dieſer Art Proportionen, das fehlende Glied eben ſo, wie bey den einfachen Proportionen in dem vorhergehenden §. gelehrt iſt, gefunden werden könne.

B. Anwendung dieſer Lehren für die Proportions-Rechnung ſelbſt.

§. 40

Jene §. 38 mitgetheilte Vorſchrift,

„zu drey gegebenen Gliedern das vierte zu finden“,

hat nach Veranlaſſung der Anzahl der gegebenen Glieder, den Namen Regel de Tri, (das heißt die Regel von dreyen Sätzen) und wegen ihrer ausgebreiteten Anwendbarkeit und Nutzens, den Ehrenamen, die goldene Regel, erhalten.

Nachdem ſolche nun bey einfachen oder zuſammengeſetzten Proportionen angewandt wird, wird ſolche auch

a. die einfache } Regel de Tri
b. die zuſammengeſetzte } Regel de Tri

genannt. Das Verfahren, das fehlende 4te Glied zu erhalten, iſt (nach dem vorhergehenden §. 39) für beyde Fälle, ein und daſſelbe.

§. 41.

Soll dieſe Regel auf Rechnungsfälle angewendet werden, ſo muß unter den gegebenen Größen ein gewiſſes Verhältniß mit beſtimmt ſeyn, nach welchem die unbekannte Größe — als das fehlende Glied des Proportions-Satzes — ausgemittelt werden ſoll.

So iſt z. B. in nachſtehender Aufgabe,

„Wenn 2 Schock Stroh 8 Rthlr. koſten, wie viel werden dann 3 Schock koſten?“

das Verhältniß, nach welchem der unbekannte Preiß (als die fehlende 4te Proportionszahl) gefunden werden muß, deutlich angegeben.

Bey der Stellung der Zahlen einer Angabe in einem Proportions-Satze, bedenke man jederzeit,

„daß nur Gegenſtände einerley Art mit einander in Verhältniſſen ſtehen können; und daher die zu denſelben gehörende Zahlen, als Verhältnißzahlen zu einander geſchrieben werden müſſen.“

Obiges Beyſpiel muß demnach alſo angeſetzt werden,

2 Schock : 3 Schock = Preis von 8 Rthl. : *Preiſe das heißt, „ſo wie ſich 2 Schock zu 3 Schock verhalten, ſo muß ſich auch der Preis von den 2 Schock à 8 Rthl. zu dem zuſuchenden Preiſe* für 3 Schock, verhalten.

Hier fehlt das 4te Glied; dieſes nach §. 38 geſucht,

2 : 3 = 8 : *
. . 24 . .

und 24 : 2 = 12, alſo iſt 12, das fehlende 4te Glied; 2 : 3 = 8 : 12
. . 24 . .
. . . 24 . . .

folglich die geſuchte Zahl des Preiſes für 3 Schock, = 12 Rthlr.

Die mechaniſch gebildeten Rechenmeiſter, welche keine Grundſätze der Proportions-Rechnung kennen, ſtellen die Zahlen nach der Wortfolge der Aufgabe, und ſagen

2 Schock koſten 8 Rthl., was koſten 3 Schock; dann ſoll man die beyden letzten Sätze mit einander multipliciren und durch den erſten Satz dividiren.

Vergleichen wir dieſen Anſatz

2 : 8 = 3 : *, mit dem vorigen
2 : 3 = 8 : *,

ſo ergiebt ſichs deutlich, daß daſſelbe Facit herauskommen müſſe, weil blos die beyden *mittlern* Glieder umgeſtellt ſind; einerley Factoren in geänderter Ordnung aber einerley Product ergeben; denn 8.3 iſt = 3.8. Allein bey näherer Unterſuchung der mit einander in Verhältniß geſtellten Größen, wird man bemerken, daß in dieſem mechaniſchen Anſatze,

„Größen *verſchiedener* Art nemlich Stroh mit Geld, *Statt* Stroh mit Stroh, oder vielmehr Schocke mit Schocken, in ein Verhältniß angeſtellt

ſind, welches ganz Naturwidrig iſt; denn Schocke Stroh und Geld, ſind an ſich ganz ungleichartige Dinge, und können daher nicht mit einander in ein Verhältniß geſetzt werden.

§. 42.

Um die richtige Proportionsſtellung ſogleich bey jeder Aufgabe zu treffen, ſo ſetze man

a. Die Fragzahl (in dem Beyſpiele des vorhergehenden §. die Zahl 3) in die zweite Stelle, und

b. Die Zahl der zu jener gehörigen gleichartigen Sache (dort die Zahl 2) in die erſte Stelle.

c. die noch übrige Zahl in die dritte, und

d. den * oder ein x in die vierte Stelle.

So lange die Größen einer Aufgabe in gleichem Verhältniſſe miteinander zu= oder abnehmen, werden dieſe Regeln vollkommen zureichen; ſobald aber eine Größe ſo vielmal ab= als eine andere zunimmt, wird die Umſtellung der Glieder des erſten oder vordern Verhältniſſes, nothwendig — man ſagt dann, „es finde ein umgekehrtes Verhältniß Statt.

Hier iſt dann Regel

„Man mache die Zahl des erſten Gliedes zur Zahl des zweyten, und die

Zahl des 2ten zur Zahl des erſten Gliedes. — Die Ausmittlung des unbekannten 4ten Gliedes bleibt dieſelbe, wie vorhin.“

Dieſes Verfahren nennt man nun die Ausübung der verkehrten Regel de Tri.

Um Anfänger einen Blick auf die Urſache, „warum dieſe Umſtellung der Glieder geſchehen müſſe“, werfen zu laſſen, ſo wollen wir Folgendes betrachten.

Man wünſchte zu wiſſen, „in wieviel Tagen 7 Taglöhner einen Waldacker umzäunen könnten, wenn 4 Taglöhner denſelben Acker in 6 Tagen umzäunten.

— Nach den vorhergegebenen Regeln kömmt 7, als Fragezahl in die 2te, und 4 als die gleichartige in die erſte, die Zahl 6 in die 3te und * oder x in die 4te Stelle zu ſtehen. —

Alſo 4 Tagl.: 7 Taglöh. = 6 Tage : * Tage.
ergiebt (7.6 = 42, 42 : 4 = 10½ Tag.

Dieſes iſt in die Augen fallend unrichtig; denn 7 Taglöhner werden gewiß daſſelbe Stück Arbeit in kürzerer Zeit, als 4 Taglöhner fertigen. Hier, wird es zugleich Ueberzeugung, „daß die Richtigkeit der Proportion, nicht auch zugleich den Beweiß für die Richtigkeit des Anſatzes in Stellung der Glieder ergebe“ vide §. 38 b. —

denn, 4 : 7 = 6 : 10½
. . . 42 . . .
. . 42 . . .

Es tritt hier nemlich der vorerwähnte Fall ein, „daß eine Größe nicht mit der andern in gleichem Verhältniſſe zu- oder abnimmt, ſondern gerade umgekehrt, ſo wie die eine wächſt die andere kleiner werden muß — denn ſo wie ſich die Zahl der Taglöhner erhöht, ſo muß die Zahl der Arbeitstage verringert werden. — Folglich findet die Umſtellung der Glieder, nach der mitgetheilten Regel, hier Anwendung. Als

7 : 4 = 6 : * | 7 : 4 = 6 : *
. . 24 . .
. . . . und 24 : 7 = $3\frac{3}{7}$ Tag.

Sieben Taglöhner werden alſo in $3\frac{3}{7}$ Tagen ſo viel als vier Taglöhner in 6 Tagen umzäunen. Dieſes entſpricht auch der geſunden Vernunft.

Anmerk. Die mechaniſchen Rechenmeiſter ſagen, „wende den ganzen Satz um, Statt 4 : 7 = 6 : *, ſchreib' 7 : 4 = 6 : * ꝛc. Warum? dieſes wiſſen ſie ſelbſt nicht. —

Aus dieſem Mitgetheilten ergiebt ſich alſo, daß der Name „verkehrte Regel de Tri, ein Unding ſey.

Folgendes glaube ich noch einſchalten zu dürfen. Bey der Anſtellung jedes Anſatzes, frage man ſich „ob das zu findende 4te Glied größer oder kleiner als das 3te (nach dem Inhalte der Aufgabe) werden könne. Hieraus kann man

man ſogleich erſehen; ob das letzte Verhältniß ein zu⸗ oder abnehmendes ſeyn werde; würde ſolches nun zunehmend ſeyn, wie in dem Beyſpiele der Aufgabe §. 35, ſo finden bloß die in dieſem §. 42 ſub a. b. c. d mit⸗ getheilten Regeln, Anwendung; würde ſolches aber, wie in dem ſo eben berechneten Bey⸗ ſpiele, abnehmend ſeyn müſſen, ſo ſtellt man auch das vordere Verhältniß abneh⸗ mend, weil nach §. 35, die Verhältniſſe einer Proportion, beyde abnehmend oder beyde zu⸗ nehmend ſeyn ſollen.

§. 43.

Aus der Anwendung dieſer bisher erklärten Proportions⸗Rechnung — oder Regel de Tri — auf verſchiedenartige Gegenſtände des Geſchäftslebens, haben nun mehrere practiſche Schriftſteller noch eine große Anzahl beſonderer Rechnungsarten bilden wol⸗ len; und ſolche mit gewiſſen, nach den Gegenſtänden der Rechnungsaufgabe, gewählten Namen belegt.

Die Berechnung der Zinſen, nennen ſie Zins⸗ rechnung, die Berechnung der Termine, in welchen eine gewiſſe Zahlung Statt finden ſolle, die Termin⸗ oder Friſtrechnung. Die Vertheilung eines Ganzen nach gewiſſen gegebenen Ver⸗ hältnißzahlen, heißt Geſellſchaftsrechnung;

die Berechnung der Miſchung gewiſſer, an Güte verſchiedener Sachen, — z. B. der Weine, Silber und Kupfers ꝛc. — um dadurch eine gemiſchte Maſſe eines vorgeſchriebenen Werthes zu erhalten, heißt Allegationsrechnung, Vermiſchungs-rechnung. Ferner — die Auflöſung gewiſſer Aufgaben durch eine gleichſam kettenartige Stellung von Mittelverhältniſſen zwiſchen zwey gegebenen Größen, deren Verhältniß durch jene nur mittelbar bekannt iſt,

heißt, Kettenrechnung, auch regula multiplex. Man wollte z. B. gerne wiſſen, wie viel 1500 Rthl: Braunſchw. Geld in holländ. Ducaten betragen. Man weiß zwar nicht, wie viel der holländiſche Ducaten im Braunſchweigiſchem Gelde werth iſt, (es iſt alſo das Verhältniß zwiſchen dieſen beyden Münzſorten nicht unmittelbar bekannt, —) allein, daß 125 Rthr. Brſchweig. 100 Rthr. holländ. Courant machen, und 2 Thaler holländ. Courant, 5 Fl. holländ. Courant, ferner 1 Fl. = 20 Stüver, und 1 Ducaten = 5 Fl. 4 Stüver = 104 Stüver ſind, dieſes iſt bekannt. Der Anſatz zeigt die kettenartige Stellung,

als * Ducaten = 1500 Rth. Braunſchw. Geld
125 Rth. Br. Gld. = 100 Rth. holl. Courant
2 Rth. holl. Cour = 3 Fl. holl. Conrant
1 Fl. holl. — = 20 Stüver.
104 Stüver = 1 Ducaten.

durch die Kenntniß des Verhältniſſes des holländiſchen

Cour. zu dem braunſchweigiſchen und eben ſo zu dem holländiſchen Ducaten, kann die Aufgabe gelößt werden; — holländiſches Courant iſt hier alſo das kannte Mittelverhältniß.

So hat man noch eine Tara, Fuſti, Falſi, Coeci und mehrere andere Rechnungsarten machen wollen. Allein das ganze Heer aller dieſer (ohne arithmetiſch dazu befugt zu ſeyn) gemachten Auflöſungsmethoden, ſind einzeln betrachtet, durchaus weiter nichts als Bruchſtücke der Proportions-Rechnung; oder beſtehen vielmehr bloß in einer mechaniſchen Anwendung der Grundſätze der Proportionen, auf beſondere vorkommende Fälle.

Unter den mir bekannten practiſchen Rechnungsbüchern zeichnet ſich das von dem verſtorbenen hieſigen Archidiaconus Silberſchlag, unter dem Titel

Vernunftmäßige und allgemeine
Rechenkunſt;

erſchienen, Leipzig 1794, bey Heinſius, vorzüglich aus; und recht ſehr hätte ich gewünſcht, daß der Verfaſſer eine 2te verbeſſerte Auflage hätte beſorgen können.

Die eigene ſcharfſinnige in dieſem Buche mitgetheilte Auflöſungsart; — die Leichtigkeit des Anſatzes der verwickeltſten zuſammengeſetzten Proportionen aus den dunkelſten Rechnungsaufgaben, veranlaſſen mich, durch Mittheilung einer mit eigenen Zuſätzen, und Erläuterungen verbundenen Skizze, auf dieſes Buch aufmerkſam zu machen und zu deſſen

etwas tiefes Nachdenken erfordernden Selbſtſtudium, nützlich vorzubereiten. Auch ſchon dieſes von mir hier Mitgetheilte, wird jeden Aufmerkſamen in den Stand ſetzen, die ſchwierigſten Rechnungsaufgaben mit Leichtigkeit zu löſen. — Nach der Lehre von den Progreſſionen und Logarithmen wird man ſolches aufgeſtellt finden.

5. Von den Progreſſionen.

§. 44.

Wenn eine Reihe von Größen, welche nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze auseinander entſtehen, ſich bildet, ſo heißt ſolche in der Rechenkunſt eine Progreſſion.

— Dieſer Progreſſionen ſind einleuchtend unzählige möglich. —

Die einzelnen Größen der Progreſſion nennt man Glieder, und nachdem dieſe Glieder wachſend oder zunehmend in gleichen arithmetiſchen oder geometriſchen Verhältniſſen auf einander folgen, ſo entſtehen,

1. wachſende oder abnehmende arithmet. } Progreſſion.
2. wachſende oder abnehmende geometr. } Progreſſion.

§. 45.

Da die Differenz und der Quotient, zwiſchen allen zunächſt aufeinander folgenden oder auseinander entſtehenden Gliedern ſich gleich bleibt; ſo bilden beyde Progreſſionen auch gleiche, und zwar zuſammenhängende, ſtäte Verhältniſſe und Proportionen — vide §. 35 —

Arithmetiſche Verhältniſſe und Proportionen

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21 — Glieder. —

1 — 3 = 3 — 5; 5 — 7 = 7 — 9; 9 — 11 = 11 — 13
13 — 15 = 15 — 17; 17 — 19 = 19 — 21 — Verhältniſſe und Proportionen. —

Geometriſche Verhältniſſe und Proportionen

1.3.9.27.81.243.729 — Glieder —

1 : 3 = 3 : 9; 9 : 27 = 27 : 81; 81 : 243 = 243 : 729
— Verhältniſſe und Proportionen.

A. Arithmetiſche Progreſſion.

§. 46.

Iſte Aufgabe.

Jedes beſtimmte Glied einer Progreſſion zu finden.

— Hierzu ſey gegeben,

„das erſte Glied, und die Differenz.“—

Auflöſung.

Man addire bey wachſenden, und ſubtrahire bey abnehmenden Progreſſionen, die Differenz ſo vielmal zu oder von dem erſten Gliede, als die Zahl des zu findenden Gliedes Einheiten weniger 1, enthält.

— Das 6te Gleid einer wachſenden und das 6te Glied einer abnehmenden Reihe ſey zu ſuchen. Für die erſte ſoll das 1ſte Glied = 2 und die Differenz = 3; für die letzte das 1ſte Glied = 17, die Differenz aber ebenfalls = 3 ſeyn —

Ad 1.

6—1=5; alſo 5mal die Differenz, 3, = 15, zu dem erſten Gliede 2, =15+2=17, als das 6te Glied.

Ad 2.

17—5.3=17—15=2, als das geſuchte 6te Glied.

Dieſes wird man auch durch die Aufſtellung einer wachſenden und abnehmenden Reihe von 6 Gliedern beſtätigt finden; als

2.5.8.11.14.17.—
17.14.11.8.5.2.

§. 47.

IIte. Aufgabe.

Die Summe der Glieder einer Progreſſion zu finden.

— Hierzu ſey das erſte und letzte Glied nebſt der Anzahl der Glieder gegeben. —

Aufloͤſung.

Die Summe des 1ſten und letzten Gliedes, wird mit der Zahl der Glieder multiplicirt und durch 2 dividirt.

Man ſucht die Summe von 9 Gliedern, deren 1ſtes = 2, deren letztes = 26.

Alſo 26+2=28; und 28.9 = 252; dieſe durch 2 dividirt = 126 = Summe der Glieder. Denn, 2+5+8+11+14+17+20+23+26=126.

Es ſoll die Summe von 1000 Gliedern gefunden werden; das 1ſte = 1, das letzte = 1000. Alſo 1000 + 1 = 1001; 1001.1000 = 1001000; dieſes dividirt durch 2, giebt 500500 zur Summe.

Wie viel betraͤgt die Summe von 30 Gliedern deren erſtes = 6, und deren letztes = 144?

Antwort 2250

— Noch einige Faͤlle, welche im geſellſchaftlichen Leben vorkommen. —

Es ſoll ein Brunnen gegraben, und dem Brunnengräber veraccordirt werden. Dieſer fordert für die 1ſte Elle 4 Gr., für die 2te 6 Gr., für die 3te 8 Gr.; und ſo fort für jede tiefer auszugrabende Elle 2 Gr. mehr, als für die vorhergehende. Wenn nun der Brunnen 36 Fuß tief ausgegraben würde, wie hoch dürfte man accordiren?

Auflöſung.

Aus dem Inhalte der Aufgabe erhellet, daß das Grabelohn der auf einander folgenden Ellenſchichten, eine arithmetiſche Progreſſion bilde, welche durch Summirung der Glieder, den Koſtenbetrag leicht ausmitteln laſſe.

Die 1ſte Elle iſt nemlich hier das 1ſte Glied, = 4 Gr., allein das letzte Glied iſt noch nicht bekannt. Dieſes ſucht man nach §. 46. Die Brunnentiefe von 36 Fuß = 18 Ellen giebt die Zahl der Glieder = 18, welche nach §. 46 zu wiſſen nöthig ſind. Die Differenz iſt hier 2 Gr., ſo viel jede Elle mehr als die vorhergehenden koſtet; folglich 18 − 1 = 17, und 17.2 = 34, dieſes zum 1ſten Gliede, = 4 Gr., addirt, giebt 34 + 4 = 38 als das letzte Glied. Dieſes zum 1ſten Gliede addirt, giebt 38 + 4 = 42, ſolches mit der Zahl der Glieder = 18 multiplicirt, und 756 durch 2 dividirt, giebt 378 Groſchen, als die Summe des Grabelohns.

$$\begin{array}{r} 42 \\ 18 \\ \hline 336 \\ 42 \\ \hline 756 \end{array}$$

Ferner.

Die Feuerpolicey einer gewiſſen Stadt hat zur Beförderung der Thätigkeit bey Feuersgefahren, feſtgeſetzt,

„daß die erſte Mannsperſon, welche ſich bey der Spritze einfindet, 2 Rth.; die 2te 4 Groſchen weniger; die 3te wieder 4 Gr. weniger als die 2te; und ſo fort, jeder Nachkommende 4 Gr. weniger als der Vorhergehende zum Geſchenk erhalten ſolle.“

Nun ſind 12 Mann für die Bedienung der Spritze einmal beſtimmt; wieviel wird der Letzte, und wieviel alle 12 Perſonen ausgezahlt bekommen?

Auflöſung.

Daß hier eine abnehmende Progreſſion in der Aufgabe liege, wird ſogleich auffallen und einleuchten, daß daher ein entgegengeſetztes Verfahren — vide §. 46. — Statt finde.

Die 2 Rthlr. (oder 48 Groſchen), welche der Erſte bey der Spritze erhalten ſoll, ſind als das 1ſte Glied anzuſehen; die Differenz muß aber ſubtrahirt — Statt bey wachſenden Progreſſionen addirt — werden.

48 Gr. wäre alſo das 1ſte Glied, 4 Gr. die Differenz, und 12, die Anzahl der Glieder. Alſo

12 — 1 = 11; und 11.4 = 44: dieſe ſubtrahirt von 48, 48 — 44 = 4,

Es wäre 4, alſo das letzte Glied. — Summirt wird wie bey den wachſenden Reihen. — Als 48 + 4 = 52; 52.6 = 312 Gr. Der Letzte bey der Spritze erhält demnach 4 Gl. und ſämmtliche Perſonen 312 Gl. = 13 Rthl., ausgezahlt.

Ferner.

Wie oft ſchlägt der Hammer einer Viertel- und Stundenuhr, binnen 12 Stunden an die Glocke?

Antwort, 126 mal.

Man weiß aus der Erfahrung, daß ein freyfallender Körper in der 1ten Secunde ſeines Falles 15 Fuß, in der 2ten 45 Fuß, in der dritten 75 Fuß, und überhaupt in jeder folgenden Secuncunde 30 Fuß mehr, als in der nächſt vorhergehenden, zurücklegt.

Wenn nun ein Stein in einen Brunnen geworfen, $\frac{1}{3}$ Minute oder 20 Secunden, zubringt, bis derſelbe den Boden des Brunnens, oder die Oberfläche des Waſſers berührt; wie tief wird im erſten Falle der trockne Brunnen, im 2ten Falle der Waſſer-Spiegel eines Brunnens, ſtehen; das heißt, wie viele Fuß wird der Stein gefallen ſeyn?

— Antwort, 585 Fuß. —

82. §.

IIIte Aufgabe.

Zwiſchen zwey gegebenen Gliedern eine beliebige Anzahl mittlerer Proportional-Glieder einzuſchalten, — das heißt in der mathematiſchen Sprache, zu interpoliren. —

Hierzu wären bekannt,

„die 2 Glieder, zwiſchen welchen interpolirt werden ſoll; und die Anzahl der zu interpolirenden Glieder“

Auflöſung.

Zwiſchen 2 Gliedern, eine mitlere Proportional-Zahl zu finden, iſt ſchon §. 38 ſub a, in dem Beyſpiele, 6 — = — 8 gelehrt worden; 6 und 8 addirt und die Summe 14 durch 2 dividirt, gab die mittlere Proportinal-Zahl 7.

Um mehrere Glieder einzuſchalten, berückſichtige man Folgendes:

Kennt man die Differenz der Glieder, ſo ergeben ſich die Glieder durch Addition der Differenz, von ſelbſt.

Um nun die Differenz zu finden, ſo muß,

1. Das letzte der gegebenen Glieder, um das 1ſte vermindert,

2. Der Reſt, durch die um 1 verminderte Anzahl der Glieder dividirt werden. — Der Quotient iſt die Differenz.

Es ſey gegeben, 8 und 24: und ſollen 4 Glieder interpolirt werden; ſo iſt 8, das 1ſte Glied

24, das letzte Glied

$2+4=6$, die gegebene und geſuchte Anzahl Glieder.

Alſo, $24-8=16$, und $6-1=5$; folg. $\left\{\begin{matrix}16\\5\\15\\\hline\end{matrix}\right|$ $3\frac{1}{5}$ die Differenz.

Die Glieder bilden ſich nunmehr ſelbſt,

$8,\ 8+3\frac{1}{5},\ 11\frac{1}{5}+3\frac{1}{5},\ 14\frac{2}{5}+3\frac{1}{5},\ 17\frac{3}{5}+3\frac{1}{5},\ 20\frac{4}{5}+3\frac{1}{5}$

$8,\ \underbrace{11\frac{1}{5}\quad 14\frac{2}{5},\quad 17\frac{3}{5},\quad 20\frac{4}{5},}_{\text{4 interpolirte Glieder.}}\quad 24$

B. Geometriſche Progreſſion.

§. 49.

Iſte Aufgabe.

Wenn der Exponent und das erſte Glied gegeben ſind, alle beliebigen Glieder zu finden?

Auflöſung.

Da alle Glieder der geometriſchen Progreſſion, aus der Multiplication des Exponenten in das nächſt-vorhergehende Glied entſtehen; ſo darf man auch hier nur das 1ſte Glied mit dem Exponenten multipliciren, um das 2te Glied zu erhalten; das 2te Glied wieder mit dem Exponenten um das 3te zu ꝛc. und ſo fort bis zu jedem beliebigen Gliede. Man ſucht z. B. das 6te Glied; das 1ſte Glied ſoll 1, der Exponent 2 ſeyn.

Alſo, 1.2=2; 2.2=4; 4.2=8; 8.2=16; 16.2=32
1ſte, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te Gl.

§. 50.

Dieſes mitgetheilte Verfahren, „ein beliebiges Glied einer Progreſſion zu finden, wird aber durch as öftere Multipliciren in dem Grade äußerſt lä-

ſig, als das geſuchte Glied ein ſehr entferntes von dem erſten Gliede, iſt. Für dieſe Fälle ſoll nun in Folgendem eine ſehr abkürzende Hülfsmethode erläutert werden.

Unter eine geometriſche Reihe, (deren 1tes Glied und Exponent, gleich, denen gegebenen) ſtelle man eine mit 0 anfangende arithmetiſche Reihe, als

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	(geometr. } Reihe,
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	(arithmet. }

ſo zeigt jede Zahl der arithmetiſchen Reihe:

a) Durch wievielmaliges Multipliciren des Exponenten in das erſte Glied, das über dieſer Zahl in der geometriſchen Reihe ſtehende Glied, entſtanden ſey. So zeigt 4, daß das darüber ſtehende Glied 16, durch 4maliges Multipliciren des Exponenten 2, in das erſte Glied, ſich ergeben habe.

1.2 = 2, 2.2 = 4, 4.2 = 8
einmal; 2mal; 3mal;
, 8.2 = 16.
4mal

b) Die Anzahl der Verhältniſſe, welche vom 1ten Gliede bis zu jedem über einer ſolchen Zahl ſtehenden Gliede Statt finden. Alſo zeigt die Zahl 3, daß 3 Verhältniſſe bis dahin vorhanden ſind; als 1 : 2,

2:4, 4:8; folglich kann man die Zahlen dieſer Zahlreihe, Verhältnißzähler, nennen; Statt dieſes langen Wortes aber bequemer durch einen gleichbedeutenden, aus dem Griechiſchen abſtammenden Ausdruck, Logarithmen, bezeichnen.

Aus jener Uebereinanderſtellung der Reihen, wird ſich die Ueberzeugung anſchaulicher ergeben, „daß jeder Logarithme, in der Anzahl ſeiner Einheiten, das wievielſte ihm zugehörende Glied der geometriſchen Reihe, anzeige“.

Zu Logar. 5, + 1, gehört alſo das 6te, zu Log. 8, + 1, das 9te Glied. — Man vergleiche dieſes mit der Zahlenſtellung in jenen Reihen. —

Um nun dieſe Logarithmen zur Abkürzung des Multiplicirens zu benutzen; ſo entwerfe man

a) eine an Anzahl willkürliche geometriſche Reihe von Gliedern, und ſtelle unter ſolche, wie im Vorhergehenden gezeigt worden, eine mit 0 anfangende arithmetiſche Reihe, deren Zahlen in dieſer Verbindung für die Folge nun ſtets „Logarithmen“, heißen ſollen.

b) Subtrahire man 1, von der Zahl des zu findenden Gliedes, und unterſuche, ob unter den Logarithmen 2 Zahlen befindlich ſind, welche zuſammenaddirt, dieſe um 1 verminderte Zahl des Gliedes geben. Wäre die Reihe nun nicht ſo weit entworfen, ſo würde durch folgendes Verfahren, welches ein Beyſpiel erläutern ſoll, der Zweck erreicht werden.

Wäre die Reihe aber ſo weit ausgedehnt, ſo müſſen

c) die über den gefundenen beyden Logarithmen ſtehenden Gliederzahlen, dann einander multiplicirt, und

d) durch das erſte Glied dividirt werden — der Quotient, iſt das verlangte Glied.

Beyſpiel.

Es ſoll das 21ſte Glied gefunden werden; dazu iſt gegeben das 1te Glied = 1, der Exponent = 2.

Aufloſung.

Man ſetze die Reihe,

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. — Glieder —
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. — Logarithm. —

Das 21te Glied ſoll gefunden werden; alſo nach b, 21 — 1 = 20. Unter den Logarithmen finden ſich aber keine ſo große Zahlen, deren 2 zuſammenaddirt, die Zahl 20 als Summe ergeben. Die Logarithmen 7 und 8 geben erſt 15 zum Logarithmen des 15 + 1ten d. i., des 16ten Gliedes; iſt aber das 16te Glied geſunden, ſo findet ſich das 21te durch Wiederholung ein und deſſelben Verfahrens, ebenfalls ſehr leicht. Für die Auffindung des 16ten Gliedes, multiplicire man die über denen Logarithmen 7 und 8 ſtehende Zahlen 128. und 256 in einander und dividire das Produkt durch das 1te Glied.

```
           128
           256
          ----
           768
          640
         256
        -------
1)      32768 | 32768 = 16te Glied.
```

Nun ſuche man zu dem Logarithmus dieſes Gliedes, einen andern, welcher zu ſolchen addirt, den Logar. 20, als den Logar. des 21ten Gliedes, giebt. Dieſer iſt 5, mit deſſen zugehöriger Zahl 32, die Zahl des Logar. 15, nun multiplicirt, als:

```
      32768
         32
    -------
      65536
     98304
    -------
    1048576 | 1048576 = 21te Glied.
```

1)

— Auf gleiche Art verfahre man bey allen vorkommenden Fällen, wo auch die entfernteſten Glieder geſucht werden — z. B.

Es ſey das 64ſte Glied zu finden, der Exponent wieder 2, und das 1ſte Glied = 1, gegeben.

Man nehme den Logarithmus des ſchon bekannten 21ten Gliedes zweymal, ſo ergiebt ſich ſchon das 41ſte; das heißt: man addire den Logarithmus 20 zu ſich ſelbſt — giebt Logar. 40 — und multiplicire das Glied des Logar. 20, = 1048576, mit ſich ſelbſt.

Als: 1048576
1048576
———————
6291456
7340032
5242880
8388608
4194304
1048576
———————
1) 1099511627776 = 41ſte Glied.

Gebraucht man nun ferner das 21ſte Glied, zur möglichſt ſchleunigen Annäherung zum 64ſten Gliede, ſo werden die Zahlen deſſelben und des 41ſten Gliedes wieder in einander multiplicirt, und dadurch das 61ſte Glied, — denn Logar. 20, + Logar. 40 = Logar. 60 — erhalten; als,

1099511627776
1048576
———————
6597069766656
7696581394432
5497558138880
8796093022208
4398046511104
1099511627776
———————
1152921504606846976 = 61ſte Gld.
1)

Jetzt fehlen nur noch 3 Glieder zur Ergänzung Vom 64ſten Gliede iſt der Logarithmos = 63; vom 61ſten Gliede = 60; alſo Logar. 60 + Logar. 3 = 63. Folglich ergeben die Glieder derſelben, in einander multiplicirt ꝛc. das geſuchte 64ſte Gliede.

1152921504606846976
8, als Glied vom Logar. 3.

9223372036854775808
1)

Das geſuchte 64ſte Glied.

Anmerk. Daß man auch durch die Wahl von andern ſ, als denen hier gewählten Hülfsgliedern und zugehörenden Logarithmen, zum Ziele gelangen konnte, wird zur Ueberzeugung wohl keiner weitern Erläuterung, ſondern bloß eines geringen Nachdenkens und Proberechnung bedürfen! —

§. 51.

IIte Aufgabe.

Die Summe aller Glieder einer Progreſſion zufinden, wozu das erſte und letzte Glied ſo wie der Exponent, gegeben ſind.

Auflöſung.

Das 1ſte Glied wird von dem letzten ſubtrahirt, der Reſt mit dem gegebenen ſ, aber um 1 vorher zu vermindernden Exponenten, dividirt und zum Quotienten das letzte Glied addirt.

1. Beyſpiel.

Es ſey die Summe von 20 Gliedern zu finden, deren 1ſtes Glied = 3, deren letztes = 3486784401 ſ und der Exponent = 3.

Alſo, 3486784401 — 3 = 3486784398; dieſes divid. durch 3—1, = 2 giebt 1743392199.
hierzu d. letzte Glied add., 3486784401.

5230176600 = Summa.

2tes Beyſpiel.

Dem Erfinder des ſinnreichen Schachſpiels, wurde von ſeinem Könige, die Bitte der Gewährung folgender Belohnung zugeſtanden: Der König ſolle ihm nur ſo viel Waitzenkörner geben, als der Betrag ſeyn würde, wenn man auf das erſte Feld des Schachbretes 1 Korn; auf das 2te 2 Körner; auf das 3te 4 Körner, u. ſ. w. ſtets 2mal ſo viel auf das nachfolgende als das vorhergehende legte. So lächerlich und an ſich unbedeutend dieſe Forderung jenem Könige auf den erſten Anblick ſchien, und wahrſcheinlich auch manchem Leſer dieſer Zeilen ſcheinen wird; ſo ergab die Berechnung dennoch eine ſolche ungeheure Anzahl Körner, daß ſolche bey weitem die Summe aller Körner, welche alles in der ganzen Welt wachſende Getraide ergeben würde, übertreffen. Wie viel Körner hätten alſo abgegeben werden müſſen?

Auflöſung.

Daß die Aufgabe bloß durch Aufſummirung der Anzahl der Körner, welche eine geometriſche Reihe bilden, und zwar ſehr leicht aufgelößt werden könne, ergeben die Data auffallend.

Jedes Schachbret hat bekanntlich 64 Felder; alſo betrifft die Summirung der Reihe, 64 Glieder,

deren 1tes Glied = 1, der Exponent = 2, und deren letztes oder 64ſtes Glied, leicht nach §. 50. gefunden werden kann, und dort bereits mit vorläufiger Berückſichtigung auf dieſes Beyſpiel, berechnet worden iſt. Zur Erſparung der Zeit und des Raumes wollen wir ſolches daher als bereits bekannt, ohne weitere Berechnung herſetzen; und bloß das zur Aufſummirung nach dieſem §. 51. noch Erforderliche, vornehmen.

Das letzte Glied =	9223372036854775808.
Abgezog. das 1te Glied =	1.
Bleibt Reſt =	9223372036854775807.

Das letzte Glied nun addirt, (weil die Diviſion des um 1 verminderten Exponenten 2, keine Aenderung hervorbringen würde)	9	223372	036854	775808
Summa =	18 Trill.	446744 Bill.	073709 Mill.	551615.

3tes Beyſpiel.

Ein Pferd wurde nach der Anzahl ſeiner Huf-Nägel folgendergeſtalt bezahlt. Der Hufnägel waren 32 Stück; der 1te wurde mit einem Heller, der 2te mit 2 Heller, der 3te mit 4 Heller ꝛc. und ſo fort bezahlt; wie theuer kam das Pferd?

Antwort, 4294967295 Heller,
oder, 7 Mill. | 456540 Rthlr. 10 gl. 2½ Pf.

§. 52.

IIIte Aufgabe.

Eine beliebige Anzahl mittlerer Proportional-Glieder zwiſchen 2 gegebenen zu interpoliren.

Auflöſung.

Man wird §. 38. ſub. Nr 3. (am Ende dieſes §.) die Auflöſung ſelbſt, ſchon erörtert finden. Hier nur die Bemerkung, daß man das Interpoliren ſo oft wiederholen dürfe, als nur immer Glieder einzuſchalten für nothwendig erachtet werden können: wie in der jetzt gleich nachfolgenden Lehre von den Logarithmen, mit mehrern gezeigt werden ſoll.

6. Von den Logarithmen.

§. 53.

Schon in dem vorhergehenden letzten Paragraph wurde über Logarithmen und deren Nutzen bey vielfältigen und großen Multiplicationen, vorläufig eine Idee mitgetheilt. Welche zahlreiche bedeutendere Vortheile dieſelben aber in ihrer ganzen Vollſtändigkeit (ſo weit ſolche bereits berechnet worden ſind) gewähren, konnte man nur in dieſer beſondern Abtheilung gehörig erläutern.

So wie die Reihen in jenem 51ten §. aufgezeichnet ſind, fehlen noch zu viel Zahlen zwiſchen den Gliedern; allein durch das bekannte Einſchalten jeder beliebigen Anzahl von mittlern Proportional-Gliedern, konnte dieſe Lücke genügend ausgefüllt werden.

§. 54.

Jede Verbindung einer geometriſchen und arithmetiſchen Reihe, zwiſchen deren Gliedern (von zwey zu zweyen) eine unbeſtimmte Anzahl mittlerer Proportional-Glieder gedacht und vorausgeſetzt wird, nennt man ein Logarithmiſches Syſtem; weil nun bekanntlich eine unzählige Verſchieden-

heit von Reihen möglich iſt, ſo kann man auch unzählig viele Logarithmiſche Syſteme bilden.

Statt des bisherigen,

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.	}	und mehrerer
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.		

anderer, iſt nachſtehendes als das praktiſch Brauchbarſte anerkannt worden. — Es iſt das, nach ſeinem erſten Berechner, dem ehemal. Profeſſor der Geometrie Brigg zu Oxfort in England, ſogenannte Briggiſche Syſtem. Als:

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	. . .
0.	1.	2.	3.	4.	5.	. . .

Auch zwiſchen den Gliedern dieſes Syſtems fehlen ſehr viele; ja noch mehrere Zahlen als in dem erſten. Zwiſchen 1 und 10, fehlen die Zahlen 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9., und zwiſchen 0. und 1., die, dieſen zugehörende Logarithmen. Zwiſchen 10. und 100., fehlen alle Zahlen von 11—99. nebſt denen zugehörenden, zwiſchen 1 und 2 zu ſuchende Logarithmen u. ſ. w. Dieſe fehlenden Zahlen, wurden nun mit einem Aufwande von unſäglicher Mühe (weil man die leichtern Berechnungen durch die höhere Rechenkunſt zu der Zeit noch nicht kannte) interpolirt.

Da nun gewiß jeder denkende und wißbegierige Leſer die Briggiſche Berechnung der Logarithmen noch entwickelter kennen zu lernen wünſchen wird, ſo glaube ich mehr Dank als Tadel zu verdienen, wenn ich durch nachſtehende Mittheilung des Berechnungsganges eines für die Zahl 7 durchs Interpoliren zu findenden

Logarithmen, die Grenzen meines Plans etwas zu überſchreiten wage.

§. 55.

Aus dem Briggiſchen Syſteme ergiebt ſich, daß jeder Logarithmus, derjenigen Zahlen, welche zwiſchen den Gliedern 1 und 10 liegen, größer als 0, aber kleiner als 1; jeder Logarithme, der zwiſchen 10 und 100 liegenden Zahlen größer als 1, aber kleiner als 2, der zwiſchen 1000 und 10000 größer als 3, aber kleiner als 4, ꝛc.; der Logarithmus zu der Zahl 7, alſo größer als 0 und kleiner als 1, würde ſeyn müſſen, da 7, zwiſchen 1 und 10 als denen, zu den Logarithmen 0 und 1, gehörigen Zahlen liegt. — Alſo beſtehen die Logarithmen aller Zahlen, welche zwiſchen die Glieder der obigen Hauptreihe fallen, aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche (die Logarithmen der Zahlen zwiſchen 1 und 10, als von 1—9, welche keine ganzen Zahlen enthalten können, ausgenommen).

Dieſe ganze Zahl, welche jeder Logarithme haben muß, heißt die Kennzziffer oder Characteriſtik; aus dem Grunde,

„weil man aus der Anzahl ihrer Einheiten die Anzahl der Ziffern derjenigen Zahl, welche zu dem Logarithmen gehört, beſtimmen kann.

So gut, wie in der Hauptreihe, die geometriſchen Glieder in die Augen fallend jedes ſtets eine Ziffer mehr, als die Zahl ſeines entſtehenden Logarithmus Einheiten hat, enthält; oder umgekehrt, die Logarithmen ſtets eine Einheit weniger, als die darüberſtehenden zugehörigen Zahlen, Ziffern haben; und beyde hieraus nacheinander wechſelſeitig beſtimmt werden können: eben ſo kann man die Zahlen und Logarithmen der eingeſchalteten Glieder auch nacheinander beſtimmen. Wird alſo zu einer Zahl von 4 Ziffern der Logarithme geſucht, ſo muß die Kennziffer deſſelben 4 — 1 = 3, ſeyn; und umgekehrt, die Zahl zu einem Logarithmus, welcher die Kennziffer 7, hat, aus 7 + 1 = 8 Ziffern, beſtehen. Weil ſich dieſe wechſelſeitige Beſtimmung nun ſehr leicht ergiebt, ſo ließ Vega und andere Auctoren der beſten Logarithmen-Handbücher, die Kennziffern vor den Logarithmen, (zur Erſparung des Raumes) ganz weg. — Man muß ſolche hinzudenken.

§. 56.

Bey der Berechnung der Logarithmen, gieng Brigg in der Genauigkeit ihrer Beſtimmung, bis zu einem zehn Milliontheilchen. — Vollkommen genau können die durch mittlere Proportionalen geſuchten Logarithmen niemals; aber unbedingt zu jedem genügenden Grade der Genauigkeit gefunden werden. —

Um die Decimalſtellen zu erhalten, ſo hing er an alle Glieder der Hauptreihe ſieben Nullen, und ſuchte nun zwiſchen je zwey und zwey Gliedern ſo viele mittlere Proportionalen, bis ſich eine ſolche ergab, welche nur um $\frac{1}{10000000}$ von derjenigen Zahl, zu welcher er den Logarithmus ſuchte, verſchieden war. Eben ſo ſuchte er auch in der arithmetiſchen Reihe, zwiſchen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3 u. ſ. w. eben ſo viele mittlere arithmetiſche Proportionalen, welche alſo nach der Ordnung, wie ſie aufgefunden wurden, zu jenen aufgefundenen Zahlen, als Logarithmen derſelben, gehörten.

§. 57.

Der Logarithmus zu 7, wurde nach jener Methode alſo berechnet:

Die Zahl 7, liegt zwiſchen 1 und 10. — An beyde hänge man (nach dem vorhergehenden letzten §.) 7 Nullen, und nenne die eine Zahlreihe A, die andere B.

$$\left.\begin{array}{r}1{,}0000000 = A\\ 10{,}0000000 = B\end{array}\right\}$$ zwiſchen A und B (als zweyen Gliedern) wird bekanntlich die mittlere Proportional Zahl dadurch gefunden, daß man beyde in einander multiplicirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel zieht. Alſo $A \times B = 10{,}00000000000000$, und nun die Wurzel aus $A \times B$ gezogen, giebt

$\sqrt{}$ 10|00|00|00|00|00|00|00 (3,1622777 = C
9. . . .
1.00. . .
.61. . .
:39.00. .
. 6.26. .
.375 . .
. 1.44.00. u. ſ. w.

Nun ſuche man auch die mittlere arithm. Proportionale zwiſchen 0 und 1. / A — B. Nach §. 38, a. werden beyde Glieder zu einander addirt und die Summe durch 2, dividirt. Alſo $\frac{0 + 1}{2}$, oder mit angehängten Nullen, $\frac{0 + 1,0000000}{2} = 0,5000000$ = C. Dieſe erhaltene Zahl iſt nun der Logarithme zu obigen 3,1622777, welche wir C nennen.

— Man ſehe jetzt von Berechnung zu Berechnung in der nachſtehenden Tafel nach. —

Weil nun 7, unverkennbar zwiſch. 3,1622777 u. 10 / C — B liegt, ſo ſucht man wieder zwiſchen B und C eine neue mittlere Proportionale;

alſo B × C = 31,62277700000000, und

$\sqrt{}$ B × C = 31|62|27|70|00|00|00|00| 5,6234132 = D. Ebenfalls nun auch die mittlere arithmetiſche Proportionale zum Logarithmen für D geſucht,

Log. B = 1,0000000
Log. C = 0,5000000 } alſo $\frac{B + C}{2} = 0,7500000 = D$.

Jetzt liegt 7, zwiſchen B und D; alſo $B \times D$ und $\sqrt{B \times D} = 7{,}7498940 = E$.

Der Logarithme zu E, aus den Logarithmen B und D giebt, $\frac{B+D}{2} = 0{,}8750000 = E$.

Nun liegt 7 zwiſchen E und D; alſo $\sqrt{E \times D} = 6{,}4938144 = F$, und Logar. $\frac{E+D}{2} = 0{,}8125000 = F$.

So wird man die ganze Berechnung durch die Tafel verfolgen können, wie ſolche bis zu Y fortgeſetzt iſt, wo ſich endlich die mittlere Proportionale 7,0000000, mit der verlangten Genauigkeit fand, deren Logarithmus auf die bekannte Weiſe, als 0,8450981, berechnet wurde.

Um dieſen einzigen Logarithmen zu erhalten, mußte man 22mal zwey Zahlgrößen, jede von 8 Ziffern in einander multipliciren, und 22mal eine 8theilige Wurzel extrahiren.

Welche ungeheure Zeit und Mühe alſo auf die Berechnung von mehr als 100000 Logarithmen (welche bis jetzt berechnet ſind,) verwandt worden iſt, kann man nach jener mitgetheilten Berechnung nun um ſo beſſer ſchätzen und beurtheilen; und Anfänger der Mathematik können ſich die Aufwendung ſolcher ungeheuern Bemühungen theils zur Aufmunterung dienen laſſen, theils ſolche als ein zuverläſſiges Merkmal anſehen, „daß der Gebrauch der Logarithmen, einen eben ſo verhältnißmäßigen

daß heißt, einen ungemein bedeutenden Nutzen gewähren müſſe! —

Tafel.

A = 1, 0000000. B = 10,0000000.	mittl. geometr. Proport. Zahl.	mittl. arithmetiſch. Proportionalzahl. oder zugehör. Logarith.
√A × B oder C	3,1622777	0,5000000
√B × C — D	5,6234132	0,7500000
√B × D — E	7,7498940	0,8750000
√D × E — F	6,4938144	0,8125000
√E × F — G	6 9783048	0,8437500
√E × G — H	7,2339400	0,8593750
√G × H — I	7,1049716	0,8515625
√G × I — K	7,0413531	0,8476562
√G × K — L	7,0097580	0 8457031
√G × L — M	6 9940131	0 8447265
√L × M — N	7,0018800	0,8452148
√M × N — O	6 9979448	0,8449706
√N × O — P	6,9999131	0,8450927
√N × P — Q	7,0008948	0,8451537
√P × Q — R	7,0004031	0,8451232
√P × R — S	7,0001580	0 8451079
√P × S — T	7,0000348	0,8451003
√P × T — U	6,9999748	0,8450965
√T × U — V	7,0000048	0,8450984
√U × V — W	6,9999880	0,8450974
√V × W — X	6,9999964	0 8450979
√V × X — Y	7,0000000	0,8450981

Die berechneten Logarithmen, ſind von verſchiedenen Mathematikern in bequeme tabellariſche Formen gebracht, und nachher gedruckt worden. Unter mehrern darüber herausgekommenen Handbüchern, iſt

das logarithmiſch-trigonometriſche Handbuch von Vega — welches nur 1 Rthlr. 6 Gr. koſtet — die 2te Auflage, vorzüglich zu empfehlen. Vor den Tafeln ſteht auch eine völlig genügende Anleitung des Gebrauchs.

§. 78.

Nutzen der Logarithmen.

Den Gebrauch der Logarithmen als äußerſt nützlich und abkürzend, für nur einigermaßen nicht ganz unbedeutende Berechnungen, zu zeigen, wird Nachſtehendes zureichend ſeyn.

1. Statt zwey oder mehrern Zahlen in einander wirklich zu multipliciren, ſo braucht man bloß die Logarithmen derſelben zu einander zu addiren, die Summe giebt den Logarithmen des Products. — Die Multiplication wird alſo in eine bloße Addition verwandelt. — Es ſey z. B. 16 × 64 zu multipliciren; ſo ſuche man im Vegaiſchen Handbuche, pag. 2, die, neben 16 und 64 zur Seite ſtehende Logarithmen und addire ſolche,

$$\left.\begin{array}{r}\text{als } 1.2041200\\ 1.8061800\\ \hline 3.0103000\end{array}\right\}$$ pag. 6, ſteht der gefundene

Logarithme des Products 3.0103000, mit der Zahl des Products = 1024.

Man ſollte ferner, 16, 32, 126, 3751, 73262, in einander multipliciren; ſo wären bloß die Logarithmen dieſer Zahlen zu ſummiren, und zu der Summe derſelben, als dem Logarithmen des Products, die zugehörige Zahl aufzuſuchen. Als

Logar. von 16 = 1,204 1200 (vide Vega. pag. 2)
— — — 32 = 1,505 1500 (— ebendaſelbſt)
— — — 126 = 2,100 3705 (desgleichen)
— — — 3751 = 3,574 1471 (vide pag. 61)
— — — 73262 = 4,864 8788 (— pag. 132)

13,248,6664. Hierzu nach dem §. 12 der Einleitung des obigen Vegaiſchen Handbuchs ſub Nr. 1 und 2. die entſprechende Zahl geſucht; findet man

a. Die 5 erſten Zahlen = 17728..
b. Die 6te Zahl, { 6664 ..
{ 6597 ..
67.....=......2.
c. Die 7te Zahl, { 49 ..
{ 180....=......7

1772827.

Da nun nach dieſem Handbuche die 8te Ziffer der geſuchten Zahl, (weil die darin enthaltenen Logarithmen nur für 7 Decimalſtellen berechnet ſind) nicht mehr gefunden werden kann; ſo ergänzt man die fehlende Zahlſtellen durch Nullen. — Die Characteriſtik fordert 14 Ziffern; alſo;

17728270000000 = dem Product.

2 Kann man das Dividiren, in ein bloßes Subtrahiren verwandeln, wenn die Logarithmen der

zu dividirenden Zahlen, von einander ſubtrahir werden. Man ſoll z. B. 143712, durch 499 dividiren, ſo müßte zu beyden Zahlen der zugehörige Logarithmus geſucht und dieſe von einander ſubtrahirt werden.

Log. von 143712 = 5.1574930
Log. von 499 = 2.6981005
2.4593925

Der Reſt iſt der Logarithmus des Quotienten, welcher in den Tafeln aufgeſucht und = 288 gefunden wird.

3. Um die vieltheiligſten Wurzeln jedes Grades auszuziehen, dividirt man mit dem Exponenten der Potenz in den Logarithmus der Zahlen, aus welchen die Wurzel extrahirt werden ſoll. der Quotient iſt der Logarithme der geſuchten Wurzelzahl, welcher in den Tafeln aufgeſucht werden muß.

Es ſollte √ aus 10,000000000000000 ausgezogen werden.

Der dazu gehörende Logar. iſt = 1,0000000, dividirt durch 2, giebt = 0,5000000. Dieſer Quotient nach pag. 49 im Vega, 4999793 giebt die Wurzel, 3,1622777. 107

4. Um Zahlen zu Potenzen zu erheben, ſo multiplicire man den Logar. der zu potenzirenden Zahl mit dem Exponenten der zu findenden Potenz; das Product ergiebt den Logarithmus der Potenzzahl.

Man ſuchte z. B. die 63ſte Potenz von 2. — 2^{63} —

So iſt Log. 2, = 0.301 0300

	0.301 0300
	63
	903 0900
	180618
	18.964,8900

Dieſen Logar. entſpricht nun die Zahl,

9223378000000000000

denn,

die 4 gegebenen Decimalen	8900	92233.	
die nächſt kleinern	8863		
	37	7	
	33		
	40	8	
		9223378	

Zu welchen Zahlen die nöthigen Nullen hinzugefügt worden ſind.

7. Practiſch-nützliche Ueberſicht der Silberſchlag. vernunftmäßigen Rechenkunſt.

§. 79

Aus §. 34 iſt bekannt,

„daß jede Proportion aus zweyen gleichen Verhältniſſen beſtehe; — alſo 2 Hauptſätze enthalte. —“

Aus §. 36,

„daß wenn das Product der beyden mittlern Glieder gleich iſt, dem Producte der beyden äußern, dann die Glieder richtig proportional ſind.

Aus §. 37,

„daß das Product der mittlern Glieder, dividirt durch das erſte Glied das Fehlende vierte ergebe.

Dieſes ſind die Grundſätze, auf welche ſich obige ſogenannte Rechenkunſt, weſentlich gründet; und von der Regel de Tri bloß durch eine ſehr ſinnreiche, bequemere und allgemeinere Anwendung derſelben, unterſcheidet.

§. 80.

Jede Rechnungsaufgabe, zerfällt nach ihrem Inhalte in zwei Haupttheile, in deren einem, noch ein Stück unbekannt iſt, und geſucht wird; z. B. 2 Schock Stroh koſten 8 Rthl. — „ein Haupttheil". — Wie viel Thl. koſt. 3 Schck. — „anderer Hauptth". —

— Die Frage bezeichnet den Abſchnitt des erſten, und den Anfang des 2ten Theils, deutlich.

Die Stellung der Glieder jener Aufgabe, würde nach der Proportions-Rechnung folgende ſeyn:

$$2 : 3 = 8 : *.$$

Da nun die zuſammengehörigen Glieder, 3 und 8, und 2 und * (beſonders dann, wenn ſolche, wie in zuſammengeſetzten Aufgaben, aus mehreren Theilen beſtehen) ſo unbequem in einander zu multipliciren ſind, ſo ſtellt man übereinander geſchrieben, die zuſammengehörenden äußern Glieder, auf eine, und die zuſammengehörenden mittlern Glieder, auf die andere Seite eines ſenkrechten Striches; wodurch für die Berechnung einer Aufgabe alſo 2 Hauptſätze gebildet werden:

als 1ter Hauptſatz	2ter Hauptſatz.
2	3
*	8.

7. Practiſch=nützliche Ueberſicht der Silberſchlag. vernunftmäßigen Rechenkunſt.

§. 79

Aus §. 34 iſt bekannt,

„daß jede Proportion aus zweyen gleichen Verhältniſſen beſtehe; — alſo 2 Hauptſätze enthalte. —“

Aus §. 36,

„daß wenn das Product der beyden mittlern Glieder gleich iſt, dem Producte der beyden äußern, dann die Glieder richtig proportional ſind.

Aus §. 37,

„daß das Product der mittlern Glieder, dividirt durch das erſte Glied das Fehlende vierte ergebe.

Dieſes ſind die Grundſätze, auf welche ſich obige ſogenannte Rechenkunſt, weſentlich gründet; und von der Regel de Tri bloß durch eine ſehr ſinnreiche, bequemere und allgemeinere Anwendung derſelben, unterſcheidet.

§. 80.

Jede Rechnungsaufgabe, zerfällt nach ihrem Inhalte in zwei Haupttheile, in deren einem, noch ein Stück unbekannt iſt, und geſucht wird; z. B. 2 Schock Stroh koſten 8 Rthl. — „ein Haupttheil“. — Wie viel Thl. koſt. 3 Schck. — „anderer Hauptth“. — — Die Frage bezeichnet den Abſchnitt des erſten, und den Anfang des 2ten Theils, deutlich.

Die Stellung der Glieder jener Aufgabe, würde nach der Proportions-Rechnung folgende ſeyn:

$$2 : 3 = 8 : *.$$

Da nun die zuſammengehörigen Glieder, 3 und 8, und 2 und * (beſonders dann, wenn ſolche, wie in zuſammengeſetzten Aufgaben, aus mehrern Theilen beſtehen) ſo unbequem in einander zu multipliciren ſind, ſo ſtellt man übereinander geſchrieben, die zuſammengehörenden äußern Glieder, auf eine, und die zuſammengehörenden mittlern Glieder, auf die andere Seite eines ſenkrechten Striches; wodurch für die Berechnung einer Aufgabe alſo 2 Hauptſätze gebildet werden:

als 1ter Hauptſatz	2ter Hauptſatz.
2	3
*	8.

§. 81.

Jeder Hauptſatz enthält:

a. einen Hauptgegenſtand, von welchem in der Aufgabe durchaus die Rede iſt, und worauf ſich das Ganze derſelben bezieht; dieſen nennt man, „das Subject."

b. Einen Nebengegenſtand, welcher eine gewiſſe Handlung, oder den Werth, Koſten, Gewinn, Verhältniß ꝛc. des Hauptgegenſtandes anzeigt: — er heißt das Prädicat des Subjects.

c. Einen Verbindungsausdruck, welcher die Verknüpfung und Beziehung des Subjects und Prädicats gegeneinander anzeigt; man nennt ſolche das Band. Nachſtehendes Schema wird alles erläutern.

1ter Satz	2ter Satz
Subject	Prädicat
2 Schock Stroh	8 Rthlr
Band	Band
koſten	koſten
Praedicat	Subject
*(wieviel) Rthl.	3 Schock

Anmerk. Aus §. 80. ergiebt ſich, „daß hier ebenfalls bloß die zuſammengehörigen Glieder übereinander geſtellt ſind."

Dieſe Theile jedes Satzes, als Subject, Band und Prädicat, nennt man Hauptbegriffe.

Jede Aufgabe muß ſolche enthalten, ſonſt iſt ihre Auflöſung unmöglich — es fehlt ſonſt etwas von den nöthigen Stücken, welche gegeben ſeyn müſſen, um die Auflöſung möglich zu machen.

§. 82.

Nicht in jeder Aufgabe ſind die Hauptbegriffe durch ſich ſelbſt ſo vollkommen (wie vorhin) ſondern häufiger erſt noch durch andere Dinge beſtimmt, welche natürlich eben ſo gut mit angeſetzt und in Berechnung gezogen werden müſſen.

Jeder Hauptbegriff kann nemlich wieder ſeinen Nebenbegriff nnd dieſer wieder noch beſondere nähere Beſtimmungen haben.

Ein Schema wird auch dieſe Unterordnung deutlich machen; es ſoll ſolches nach einer Aufgabe entworfen werden.

Aufgabe.

In einer Woche (die Woche zu 6 Tagen, den Tag zu 12 Stunden gerechnet) verfertigen 16 Arbeiter einen Graben, welcher 360 Fuß lang, 5 Fuß breit und 3 Fuß tief iſt. Sollte nun aber ein Graben von 2000 Fuß Länge, 6 Fuß Breite und 5 Fuß Tiefe in einer Woche (die Woche zu 7 Tagen, den Tag zu 14 Stunden gerechnet,) verfertiget werden; wie viel Arbeiter muß man anlegen?

Schema.

Erſter Satz.	Zweiter Satz.
16 Arbeiter das Subject	einen Graben das Prädicat.
verfertigen . . . Band.	von
in	360 Fuß lang 5 — breit } Nebenbegriffe. 3 — tief
einer Woche Nebenbegriff.	*(wieviel) Arbeiter das Subject.
dieſe zu	verfertigen . . . das Band
6 Tagen den Tag zu } nähere Beſtimmungen. 12 Stunden	in
gerechnet	einer Woche der Nebenbegriff
einen Graben . . Praedicat.	dieſe zu
von	7 Tagen der Tag zu } nähere Beſtimmungen. 14 Stunden
2000 Fuſs lang 6 — breit } Nebenbegr. 5 — tief	gerechnet.

Vorläufige Erklärung dieſes Anſatzes:

Der Hauptgegenſtand oder das Subject der Aufgabe, waren unverkennbar die Arbeiter; ſowohl in dem einen als dem andern Haupttheile. — Das eine Subject ſind nemlich die 16 Arbeiter — das andere die * Arbeiter. — Da es nun heiſt, Arbeiter verfertigen einen Graben," ſo iſt auf-

fallend der Ausdruck, einen Graben, das Prädicat; und das Wort, verfertigen, das Band, welches das Subject und Prädicat mit einander verbindet, und ihre Beziehung auf einander ergiebt.

Das Band (hier verfertigen) ſteht in der Aufgabe aber noch mit dem Zuſatze, in einer Woche; dieſes iſt alſo ein Nebenbegriff. Die Woche ſoll aber wieder zu einer gewiſſen Anzahl Tage, und der Tag wieder zu einer gewiſſen Anzahl Stunden gerechnet werden; dieſes ſind einleuchtend nähere Beſtimmungen der Nebenbegriffe.

Satz 1, und Satz 2,
enthalten alſo jeder,

1. Ein Subject — aber hier ohne Nebenbegriff ꝛc., weil die Aufgabe für das Subject keine enthält; —

2. Ein Band — mit Nebenbegriffen und nähern Beſtimmungen derſelben, —

3. Ein Prädicat — mit Nebenbegriffen, ohne nähere Beſtimmung, weil die Aufgabe keine enthält. —

Nach derartig vollendeter Stellung der Größen, werden die auf beiden Seiten des Strichs über einander ſtehende Zahlen, in einander multiplicirt, und mit dem dadurch erhaltenen Producte der Seite mit *, in das Product der Seite ohne *, dividirt; der Quotient giebt das

Geſuchte für *, nemlich hier, die Zahl der Arbeiter. —

— So leicht wird durch dieſen ſinnreichen Anſatz die Auflöſung einer ſchon ſchweren; in die zuſammengeſetzte Regel de Tri gehörigen und dort mühſam zu löſenden Aufgabe. Sollte ein ſolcher Blick, den wißbegierigen Leſer nicht auf das anziehendſte aufmuntern, die wenigen Geiſtesanſtrengungen, welche dieſe Methode anfangs verlangt, mit Vergnügen und Ausdauer aufzuwenden?

§. 83.

Angehende Rechner werden gewöhnlich über den Anſatz ſo vieler, ſelbſt aus den Nebenbegriffen und nähern Beſtimmungen, mit in Berechnung zu ziehenden Zahlen, unruhig; ſelbſt geübtere, rechnen oft mechaniſch richtig, und wiſſen es ſich doch nicht einmal zu erklären, wie es möglich ſey, daß dieſe Zahlen die Auflöſung der Aufgabe mit bewirken können, alſo durchaus mit in Betracht gezogen werden müſſen.

Um nun dieſes Dunkel ihnen zu erleuchten, werden folgende Wahrheiten als Mittel dienen.

Die Proportionsglieder können bekanntlich ſo wohl aus Primzahlen als Factorenzahlen beſtehen; beyde können eine richtige Proportion bilden. Da nun (nach §. 80.) die zuſammengehörigen Glieder

auch untereinander geſtellt werden dürfen, ſo gilt daſſelbe auch für die einzelnen Factoren der Factorenzahlen.

Statt 9 : 18 = 36 : 72.

$$9 = \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases} \quad \Bigg| \quad 18 = \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$$

$$* \quad \Bigg| \quad 36 = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{cases}$$

Die Factoren von 18 und 36 = 3, 6, 2, 3, 3, 2, in einander multiplicirt, geben daſſelbe Product, als 18 ⋉ 36, nemlich 648. — Die Berechnung bleibt alſo, und wenn funfzig Factoren über einander ſtehen, dieſelbe.

Nun ſind aber alle durch die Nebenbegriffe und nähern Beſtimmungen in einem Anſatze ſtehende Zahlen, vollkommen als Factoren des Hauptbegriffs, zu welchem ſie gehören, anzuſehen.

Betrachtet man daher jenes ſo ſehr zuſammengeſetzte Beyſpiel des vorigen §.; ſo ſind die Zahlen, welche die Länge, Breite und Tiefe der Graben beſtimmen, bloße Factoren von dem Hauptgegenſtande, nemlich dem Graben; und die Zahlen, welche die Zeit des Verfertigens, beſtimmten, wiederum Factoren des Hauptbegriffs, verfertigen.

So wenig aber von irgend einem Factor, auch nur eine Einheit bey Berechnungen weggelaſſen werden darf; eben ſo wenig darf auch eine Zahl

eines Nebenbegriffs ꝛc. — Weil dieſer dieſel-be Beziehung auf ſeinen Hauptbegriff, als der Factor auf die Factorenzahlen hat, weggelaſſen werden; und grade iſt bey dieſer Rechnungsmethode die Auffindung der Factoren in dem Inhalte der Aufgabe, und deren richtige Stellung auf dieſer oder jener Seite — vide §. 86 — das Wichtig-ſte: ſo wie überhaupt von der bloßen Kenntniß des Anſatzes, die leichteſte Auflöſung der ſchwer-ſten Aufgaben, allein abhängt.

§. 84.

Zur richtigen Bildung eines Anſatzes für alle mögliche nur vorkommende Aufgaben, ſollen die nöthigſten Vorkenntniſſe in Nachſtehendem, mitge-theilt werden.

Das Ganze zerfällt in folgende Theile.

a. Haupt- und Nebenbegriffe ꝛc. aufzufinden. — Dieſes iſt nicht durchgängig mit gleichen Schwierigkeiten verbunden. Nachdem daß ſich der Inhalt einer Aufgabe, mehr oder minder hiſtoriſch eingekleidet findet, werden die dahin-abzielende Bemühungen, auch ein verhältniß-mäßiges Nachdenken erfodern.

b. Die Vorbereitung der Haupt- und Neben-begriffe zum Anſatze, wenn dieſelben in einzel-nen Stücken oder Theilen angegeben ſind,

und daher zuvor durch arithmetiſche Hülfs=mittel unter einen generellen Namen gebracht werden müſſen. — Wie z. E., die Aufgaben für die Geſellſchaftsrechnung erfo=dern. —

c. Die richtige Stellung der aufgefundenen und etwa vorbereiteten Haupt= und Nebenbegriffe; ſo wie über den Anſatz überhaupt.

d. Die Auflöſung durch vorzunehmende Berech=nungen; und — Proberechnung.

e. Nützliche Abkürzung, des, zur Beſtimmung des unbekannten Gliedes erforderlichen Mul=tiplicirens und Dividirens der im Anſatze geordneten Theile.

§. 85.

Anleitung, die Haupt= und Nebenbegrif=fe ꝛc. aufzufinden.

A. Auffindung der Hauptbegriffe.

1. Man leſe jede Aufgabe mehrere male mit der größeſten Aufmerkſamkeit durch, und ſuche zuerſt den Sinn derſelben und worauf ſolche abzwecke, was nach ihrem Inhalte geſucht werden ſolle, mit Ueberzeugung vollkommen richtig aufzufinden.

2. Alle Einkleidungen und hiſtoriſche Umſtände welche nach dem Zwecke und Sinne der Auf=

gabe nicht mit in Berechnung gezogen werden können, werfe man weg, und behalte bloß die zur Verſtändlichmachung und Bezeichnung der aufgefundenen Zahlen, unentbehrlichen Worte bey. Z. B.

Aus nachſtehender Aufgabe:

„16 Klafter, altes 120 jähriges fichtenes Holz, koſten mit 2 tägigem Rückelohne, im Walde 50 Rthlr.; wie theuer wird man 6 Klafter deſſelben Holzes bezahlen müſſen?“

Werden hier alle, nicht in Berechnung zu ziehende Umſtände weggeworfen; ſo bleibt

„16 Klafter koſten 50 Rthlr. wie viel koſten 6 Klafter?“

Ferner:

Zur Sicherung eines 8 Fuß hohen Wildzauns, ſollen 100 Mann einen beträchtlichen Graben aufwerfen, welcher 10000 Fuß lang, 6 Fuß breit und 3½ Fuß tief iſt. Ein Stück von 100 Fuß Länge, 6 Fuß Breite und 3 Fuß Tiefe, wurde in derſelben Gegend mit 96 Rthlr. bezahlt; ſollte dieſer Preis und das dafür gefertigte Stück Graben nun auch hier zum Grunde gelegt werden, wie viel würde dann das Grabelohn für jenen Graben betragen?

Wirft man aus dieſem Beyſpiele alles, nicht zur Berechnung zu ziehende weg; ſo bleibt bloß,

„100 Fuß Graben von 6 Fuß Breite, 3 Fuß Tiefe koſten 96 Rth.“

Wie viel koſten 10000 Fuß Graben, von 6 Fuß Breite, aber nur 3½ Fuß Tiefe. Weder der

8 Fuß hohe Wildzaun, noch die 100 Arbeiter konnten hier in Betracht kommen, weil ſolche ſo wenig auf die Beſtimmung der Koſten für die 10000 Fuß Graben, als in Rückſicht der Koſten für die 100 Fuß Graben, in der Berechnung Einfluß haben konnten; die Koſten müſſen dieſelben bleiben, wenn des Grabens Länge, Breite und Tiefe, dieſelbe bleibt; und wenn der Wildzaun Statt 8 Fuß, 18.20,... Fuß hoch wäre; die Koſten werden für die Arbeit des Ausgrabens, nicht aber in Rückſicht der Höhe des Zauns, gegeben. Der Betrag des Grabelohns (96 Rthl.) wurde allerdings durch die Anzahl der Arbeiter, (100) beſtimmt; allein da das Arbeitslohn einmal durch ſolche beſtimmt iſt, ſo kommt dieſelbe nicht mit in Anſatz ſondern ſie ſteht nur ſtillſchweigend, unausgedrückt, mit in Beziehung auf die auszugrabende Fußzahl, da. Die Aufgabe könnte ſehr gut auch folgendermaßen ausgedrückt ſeyn:

„Wenn zur Sicherung eines 8 — 10 — 12 Fuß hohen Wildzauns, ein Graben 100 Fuß lang, 6 Fuß breit, 3 Fuß tief, von 100 Leuten für 95 Rthl. gegraben würde; wie viel Grabelohn würden dieſelben Leute für einen Graben von 10000 Fuß Länge, 6 Fuß Breite, $3\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe, erhalten?

Unverkennbar bleibt alſo die Anzahl der Grabenden im Anſatze, und alſo auch in der Berechnung ganz weg.

das logarithmiſch - trigonometriſche Handbuch von Vega — welches nur 1 Rthlr. 6 Gr. koſtet — die 2te Auflage, vorzüglich zu empfehlen. Vor den Tafeln ſteht auch eine völlig genügende Anleitung des Gebrauchs.

§. 78.

Nutzen der Logarithmen.

Den Gebrauch der Logarithmen als äußerſt nützlich und abkürzend, für nur einigermaßen nicht ganz unbedeutende Berechnungen, zu zeigen, wird Nachſtehendes zureichend ſeyn.

1. Statt zwey oder mehrern Zahlen in einander wirklich zu multipliciren, ſo braucht man bloß die Logarithmen derſelben zu einander zu addiren, die Summe giebt den Logarithmen des Products. — Die Multiplication wird alſo in eine bloße Addition verwandelt. — Es ſey z. B. 16 × 64 zu multipliciren; ſo ſuche man im Vegaiſchen Handbuche, pag. 2, die, neben 16 und 64 zur Seite ſtehende Logarithmen und addire ſolche,

als 1.2041200
1.8061800 } pag. 6, ſteht der gefundene
3.0103000

Logarithme des Products 3.0103000, mit der Zahl des Products = 1024.

Man ſollte ferner, 16, 32, 126, 3751, 73262, in einander multipliciren; ſo wären bloß die Logarithmen dieſer Zahlen zu ſummiren, und zu der Summe derſelben, als dem Logarithmen des Products, die zugehörige Zahl aufzuſuchen. Als

Logar. von 16 = 1,204 1200 (vide Vega. pag. 2)
— — — 32 = 1,505 1500 (— ebendaſelbſt)
— — — 126 = 2,100 3705 (desgleichen)
— — — 3751 = 3,574 1471 (vide pag. 61)
— — — 73262 = 4,864 8788 (— pag. 132)

13,248,6664. Hierzu nach

dem §. 12 der Einleitung des obigen Vegaiſchen Handbuchs ſub Nr. 1 und 2. die entſprechende Zahl geſucht; findet man

a. Die 5 erſten Zahlen = 17728 . .
b. Die 6te Zahl, { 6664 . .
6597 . .
67 . . . . . = ... 2 .
c. Die 7te Zahl, { 49 . .
180 . . . = ... 7

1772827.

Da nun nach dieſem Handbuche die 8te Ziffer der geſuchten Zahl, (weil die darin enthaltenen Logarithmen nur für 7 Decimalſtellen berechnet ſind) nicht mehr gefunden werden kann; ſo ergänzt man die fehlende Zahlſtellen durch Nullen. — Die Characteriſtik fordert 14 Ziffern; alſo,

17728270000000 = dem Product.

2 Kann man das Dividiren, in ein bloßes Subtrahiren verwandeln, wenn die Logarithmen der

6. Von den Logarithmen.

§. 53.

Schon in dem vorhergehenden letzten Paragraph wurde über Logarithmen und deren Nutzen bey vielfältigen und großen Multiplicationen, vorläufig eine Idee mitgetheilt. Welche zahlreiche bedeutendere Vortheile dieſelben aber in ihrer ganzen Vollſtändigkeit (ſo weit ſolche bereits berechnet worden ſind) gewähren, konnte man nur in dieſer beſondern Abtheilung gehörig erläutern.

So wie die Reihen in jenem 51ten §. aufgezeichnet ſind, fehlen noch zu viel Zahlen zwiſchen den Gliedern; allein durch das bekannte Einſchalten jeder beliebigen Anzahl von mittlern Proportional-Gliedern, konnte dieſe Lücke genügend ausgefüllt werden.

§. 54.

Jede Verbindung einer geometriſchen und arithmetiſchen Reihe, zwiſchen deren Gliedern (von zwey zu zweyen) eine unbeſtimmte Anzahl mittlerer Proportional-Glieder gedacht und vorausgeſetzt wird, nennt man ein Logarithmiſches Syſtem; weil nun bekanntlich eine unzählige Verſchieden-

heit von Reihen möglich iſt, ſo kann man auch unzählig viele Logarithmiſche Syſteme bilden.

Statt des bisherigen,

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.	und mehrerer
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.	

anderer, iſt nachſtehendes als das praktiſch Brauchbarſte anerkannt worden. — Es iſt das, nach ſeinem erſten Berechner, dem ehemal. Profeſſor der Geometrie Brigg zu Oxfort in England, ſogenannte Briggiſche Syſtem. Als:

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	. . .
0.	1.	2.	3.	4.	5.	. . .

Auch zwiſchen den Gliedern dieſes Syſtems fehlen ſehr viele; ja noch mehrere Zahlen als in dem erſten. Zwiſchen 1 und 10, fehlen die Zahlen 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9., und zwiſchen 0. und 1., die, dieſen zugehörende Logarithmen. Zwiſchen 10. und 100., fehlen alle Zahlen von 11 — 99. nebſt denen zugehörenden, zwiſchen 1 und 2 zu ſuchende Logarithmen u. ſ. w. Dieſe fehlenden Zahlen, wurden nun mit einem Aufwande von unſäglicher Mühe (weil man die leichtern Berechnungen durch die höhere Rechenkunſt zu der Zeit noch nicht kannte) interpolirt.

Da nun gewiß jeder denkende und wißbegierige Leſer die Briggiſche Berechnung der Logarithmen noch entwickelter kennen zu lernen wünſchen wird, ſo glaube ich mehr Dank als Tadel zu verdienen, wenn ich durch nachſtehende Mittheilung des Berechnungsganges eines für die Zahl 7 durchs Interpoliren zu findenden

Logarithmen, die Grenzen meines Plans etwas zu überſchreiten wage.

§. 55.

Aus dem Briggiſchen Syſteme ergiebt ſich, daß jeder Logarithmus, derjenigen Zahlen, welche zwiſchen den Gliedern 1 und 10 liegen, größer als 0, aber kleiner als 1; jeder Logarithme, der zwiſchen 10 und 100 liegenden Zahlen größer als 1, aber kleiner als 2, der zwiſchen 1000 und 10000 größer als 3, aber kleiner als 4, ꝛc.; der Logarithmus zu der Zahl 7, alſo größer als 0 und kleiner als 1, würde ſeyn müſſen, da 7, zwiſchen 1 und 10 als denen, zu den Logarithmen 0 und 1, gehörigen Zahlen liegt. — Alſo beſtehen die Logarithmen aller Zahlen, welche zwiſchen die Glieder der obigen Hauptreihe fallen, aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche (die Logarithmen der Zahlen zwiſchen 1 und 10, als von 1 — 9, welche keine ganzen Zahlen enthalten können, ausgenommen).

Dieſe ganze Zahl, welche jeder Logarithme haben muß, heißt die Kennziffer oder Characteriſtik; aus dem Grunde,

„weil man aus der Anzahl ihrer Einheiten die Anzahl der Ziffern derjenigen Zahl, welche zu dem Logarithmen gehört, beſtimmen kann.

So gut, wie in der Hauptreihe, die geometriſchen Glieder in die Augen fallend jedes ſtets eine Ziffer mehr, als die Zahl ſeines entſtehenden Logarithmus Einheiten hat, enthält; oder umgekehrt, die Logarithmen ſtets eine Einheit weniger, als die darüberſtehenden zugehörigen Zahlen, Ziffern haben; und beyde hieraus nacheinander wechſelſeitig beſtimmt werden können: eben ſo kann man die Zahlen und Logarithmen der eingeſchalteten Glieder auch nacheinander beſtimmen. Wird alſo zu einer Zahl von 4 Ziffern der Logarithme geſucht, so muß die Kennziffer deſſelben 4 — 1 = 3, ſeyn; und umgekehrt, die Zahl zu einem Logarithmus, welcher die Kennziffer 7, hat, aus 7 + 1 = 8 Ziffern, beſtehen. Weil ſich dieſe wechſelſeitige Beſtimmung nun ſehr leicht ergiebt, ſo ließ Vega und andere Auctoren der beſten Logarithmen-Handbücher, die Kennziffern vor den Logarithmen, (zur Erſparung des Raumes) ganz weg. — Man muß ſolche hinzudenken.

§. 56.

Bey der Berechnung der Logarithmen, gieng Brigg in der Genauigkeit ihrer Beſtimmung, bis zu einem zehn Milliontheilchen. — Vollkommen genau können die durch mittlere Proportionalen geſuchten Logarithmen niemals; aber unbedingt zu jedem genügenden Grade der Genauigkeit gefunden werden. —

Um die Decimalſtellen zu erhalten, ſo hing er an alle Glieder der Hauptreihe ſieben Nullen, und ſuchte nun zwiſchen je zwey und zwey Gliedern ſo viele mittlere Proportionalen, bis ſich eine ſolche ergab, welche nur um $\frac{1}{10000000}$ von derjenigen Zahl, zu welcher er den Logarithmus ſuchte, verſchieden war. Eben ſo ſuchte er auch in der arithmetiſchen Reihe, zwiſchen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3 u. ſ. w. eben ſo viele mittlere arithmetiſche Proportionalen, welche alſo nach der Ordnung, wie ſie aufgefunden wurden, zu jenen aufgefundenen Zahlen, als Logarithmen derſelben, gehörten.

§. 57.

Der Logarithmus zu 7, wurde nach jener Methode alſo berechnet:

Die Zahl 7, liegt zwiſchen 1 und 10. — An beyde hänge man (nach dem vorhergehenden letzten §.) 7 Nullen, und nenne die eine Zahlreihe A, die andere B.

$$\left.\begin{aligned}1{,}0000000 &= A\\ 10{,}0000000 &= B\end{aligned}\right\}$$ zwiſchen A und B (als zweyen Gliedern) wird bekanntlich die mittlere Proportional Zahl dadurch gefunden, daß man beyde in einander multiplicirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel ziehet. Alſo $A \times B = 10{,}00000000000000$, und nun die Wurzel aus $A \times B$ gezogen, giebt

$\sqrt{\ } 10|00|00|00|00|00|00|00 \; (3,1622777 = C$

9. . . .

1.00. . . .

.61. . .

:39.00. .

. 6.26. .

.375. .

. 1.44.00. u. ſ. w.

Nun ſuche man auch die mittlere arithm. Proportionale zwiſchen 0 und 1. } A — B. } Nach §. 38, a. werden beyde Glieder zu einander addirt und die Summe durch 2, dividirt. Alſo $\frac{0+1}{2}$, oder mit angehängten Nullen, $\frac{0+1{,}0000000}{2} = 0{,}5000000$ = C. Dieſe erhaltene Zahl iſt nun der Logarithme zu obigen 3,1622777, welche wir C nennen.

— Man ſehe jetzt von Berechnung zu Berechnung in der nachſtehenden Tafel nach. —

Weil nun 7, unverkennbar zwiſch. 3,1622777 u. 10 } C — B } liegt, ſo ſucht man wieder zwiſchen B und C eine neue mittlere Proportionale;

alſo B × C = 31,6227700000000, und

$\sqrt{\ }$ B × C = 31|62|27|70|00|00|00|00| 5,6234132 = D. Ebenfalls nun auch die mittlere arithmetiſche Proportionale zum Logarithmen für D geſucht,

Log. B = 1,0000000 }
Log. C = 0,5000000 } alſo $\frac{B+C}{2}$ = 0,7500000 = D.

Jetzt liegt 7, zwiſchen B und D; alſo B ⨯ D und $\sqrt{B \times D} = 7{,}7498940 = E$.

Der Logarithme zu E, aus den Logarithmen B und D giebt, $\frac{B + D}{2} = 0{,}8750000 = E$.

Nun liegt 7 zwiſchen E und D; alſo $\sqrt{E \times D} = 6\,4938144 = F$, und Logar. $\frac{E + D}{2} = 0{,}8125000 = F$.

So wird man die ganze Berechnung durch die Tafel verfolgen können, wie ſolche bis zu Y fortgeſetzt iſt, wo ſich endlich die mittlere Proportionale 7,0000000, mit der verlangten Genauigkeit fand, deren Logarithmus auf die bekannte Weiſe, als 0,8450981, berechnet wurde.

Um dieſen einzigen Logarithmen zu erhalten, mußte man 22mal zwey Zahlgrößen, jede von 8 Ziffern in einander multipliciren, und 22mal eine 8theilige Wurzel extrahiren.

Welche ungeheure Zeit und Mühe alſo auf die Berechnung von mehr als 100000 Logarithmen (welche bis jetzt berechnet ſind,) verwandt worden iſt, kann man nach jener mitgetheilten Berechnung nun um ſo beſſer ſchätzen und beurtheilen; und Anfänger der Mathematik können ſich die Aufwendung ſolcher ungeheuern Bemühungen theils zur Aufmunterung dienen laſſen, theils ſolche als ein zuverläſſiges Merkmal anſehen, „daß der Gebrauch der Logarithmen, einen eben ſo verhältnißmäßigen

daß heißt, einen ungemein bedeutenden Nutzen gewähren müſſe! —

Tafel.

A = 1, 0000000. B = 10,0000000.	mittl. geometr. Proport. Zahl.	mittl. arithmetiſch. Proportionalzahl. oder zugehör. Logarith.
√A × B oder C	3,1622777	0,5000000
√B × C — D	5,6234132	0,7500000
√B × D — E	7,7498940	0,8750000
√D × E — F	6,4938144	0,8125000
√E × F — G	6 9783048	0,8437500
√E × G — H	7,2339400	0,8593750
√G × H — I	7,1049716	0,8515625
√G × I — K	7,0413531	0,8476562
√G × K — L	7,0097580	0 8457031
√G × L — M	6 9940131	0 8447265
√L × M — N	7,0018800	0,8452148
√M × N — O	6 9979448	0,8449706
√N × O — P	6,9999131	0,8450927
√N × P — Q	7,0008948	0,8451537
√P × Q — R	7,0004031	0,8451232
√P × R — S	7 0001580	0 8451079
√P × S — T	7,0000348	0,8451003
√P × T — U	6,9999748	0,8450965
√T × U — V	7,0000048	0,8450984
√U × V — W	6,9999880	0,8450974
√V × W — X	6,9999964	0 8450979
√V × X — Y	7,0000000	0,8450981

Die berechneten Logarithmen, ſind von verſchiedenen Mathematikern in bequeme tabellariſche Formen gebracht, und nachher gedruckt worden. Unter mehrern darüber herausgekommenen Handbüchern, iſt

das logarithmiſch = trigonometriſche Handbuch von Vega — welches nur 1 Rthlr. 6 Gr. koſtet — die 2te Auflage, vorzüglich zu empfehlen. Vor den Tafeln ſteht auch eine völlig genügende Anleitung des Gebrauchs.

§. 78.

Nutzen der Logarithmen.

Den Gebrauch der Logarithmen als äußerſt nützlich und abkürzend, für nur einigermaßen nicht ganz unbedeutende Berechnungen, zu zeigen, wird Nachſtehendes zureichend ſeyn.

1. Statt zwey oder mehrern Zahlen in einander wirklich zu multipliciren, ſo braucht man bloß die Logarithmen derſelben zu einander zu addiren, die Summe giebt den Logarithmen des Products. — Die Multiplication wird alſo in eine bloße Addition verwandelt. — Es ſey z. B. 16 × 64 zu multipliciren; ſo ſuche man im Vegaiſchen Handbuche, pag. 2, die, neben 16 und 64 zur Seite ſtehende Logarithmen und addire ſolche,

   als 1.2041200
   1.8061800
   3.0103000
   } pag. 6, ſteht der gefundene Logarithme des Products 3.0103000, mit der Zahl des Products = 1024.

Man ſollte ferner, 16, 32, 126, 3751, 73262, in einander multipliciren; ſo wären bloß die Logarithmen dieſer Zahlen zu ſummiren, und zu der Summe derſelben, als dem Logarithmen des Products, die zugehörige Zahl aufzuſuchen. Als

Logar. von 16 = 1,204 1200 (vide Vega. pag. 2)
— — — 32 = 1,505 1500 (— ebendaſelbſt)
— — — 126 = 2,100 3705 (desgleichen)
— — — 3751 = 3,574 1471 (vide pag. 61)
— — — 73262 = 4,864 8788 (— pag. 132)

13,248,6664. Hierzu nach dem §. 12 der Einleitung des obigen Vegaiſchen Handbuchs ſub Nr. 1 und 2. die entſprechende Zahl geſucht; findet man

a. Die 5 erſten Zahlen = 17728..
b. Die 6te Zahl, { 6664 ..
6597 ..
67.....=......2.
c. Die 7te Zahl, { 49 ..
180...=......7

1772827.

Da nun nach dieſem Handbuche die 8te Ziffer der geſuchten Zahl, (weil die darin enthaltenen Logarithmen nur für 7 Decimalſtellen berechnet ſind) nicht mehr gefunden werden kann; ſo ergänzt man die fehlende Zahlſtellen durch Nullen. — Die Characteriſtik fordert 14 Ziffern; alſo;

17728270000000 = dem Product.

2 Kann man das Dividiren, in ein bloßes Subtrahiren verwandeln, wenn die Logarithmen der

zu dividirenden Zahlen, von einander ſubtrahirt werden. Man ſoll z. B. 143712, durch 499 dividiren, ſo müßte zu beyden Zahlen der zugehörige Logarithmus geſucht und dieſe von einander ſubtrahirt werden.

Log. von 143712 = 5.1574930
Log. von 499 = 2.6981005
2.4593925

Der Reſt iſt der Lagarithmus des Quotienten, welcher in den Tafeln aufgeſucht und = 288 gefunden wird.

3. Um die vieltheiligſten Wurzeln jedes Grades auszuziehen, dividirt man mit dem Exponenten der Potenz in den Logarithmus der Zahlen, aus welchen die Wurzel extrahirt werden ſoll. der Quotient iſt der Logarithme der geſuchten Wurzelzahl, welcher in den Tafeln aufgeſucht werden muß.

Es ſollte √ aus 10,0000000000000 ausgezogen werden.

Der dazu gehörende Logar. iſt = 1,0000000, dividirt durch 2, giebt = 0 5000000. Dieſer Quotient nach pag. 49 im Vega, 4999793 giebt die Wurzel, 3,1622777. 107

4. Um Zahlen zu Potenzen zu erheben, ſo multiplicire man den Logar. der zu potenzirenden Zahl mit dem Exponenten der zu findenden Potenz; das Product ergiebt den Logarithmus der Potenzzahl.

Man ſuchte z. B. die 63ſte Potenz von 2. — 2^{63} —

So iſt Log. 2, = 0.301 0300

```
          63
  ─────────────
    903 0900
  180618
  ─────────────
  18.964,8900
```

Dieſen Logar. entſpricht nun die Zahl,

9223378000000000000

denn,

```
die 4 gegebenen Decimalen  8900|92233.
die nächſt kleinern        8863|     .
                             37 .....7
                             33
                             ──
                              40 ......8
                           ─────────────
                             9223378
```

Zu welchen Zahlen die nöthigen Nullen hinzugefügt worden ſind.

7. Practiſch-nützliche Ueberſicht der Silberſchlag. vernunftmäßigen Rechenkunſt.

§. 79.

Aus §. 34 iſt bekannt,

„daß jede Proportion aus zweyen gleichen Verhältniſſen beſtehe; — alſo 2 Hauptſätze enthalte. —“

Aus §. 36,

„daß wenn das Product der beyden mittlern Glieder gleich iſt, dem Producte der beyden äußern, dann die Glieder richtig proportional ſind.

Aus §. 37,

„daß das Product der mittlern Glieder, dividirt durch das erſte Glied das Fehlende vierte ergebe.

Dieſes ſind die Grundſätze, auf welche ſich obige ſogenannte Rechenkunſt, weſentlich gründet; und von der Regel de Tri bloß durch eine ſehr ſinnreiche, bequemere und allgemeinere Anwendung derſelben, unterſcheidet.

§. 80.

Jede Rechnungsaufgabe, zerfällt nach ihrem Inhalte in zwei Haupttheile, in deren einem, noch ein Stück unbekannt iſt, und geſucht wird; z. B. 2 Schock Stroh koſten 8 Rthl. — „ein Haupttheil“. — Wie viel Thl. koſt. 3 Schck. — „anderer Hauptth“. — — Die Frage bezeichnet den Abſchnitt des erſten, und den Anfang des 2ten Theils, deutlich.

Die Stellung der Glieder jener Aufgabe, würde nach der Proportions-Rechnung folgende ſeyn:

$$2 : 3 = 8 : *.$$

Da nun die zuſammengehörigen Glieder, 3 und 8, und 2 und * (beſonders dann, wenn ſolche, wie in zuſammengeſetzten Aufgaben, aus mehreren Theilen beſtehen) ſo unbequem in einander zu multipliciren ſind, ſo ſtellt man übereinander geſchrieben, die zuſammengehörenden äußern Glieder, auf eine, und die zuſammengehörenden mittlern Glieder, auf die andere Seite eines ſenkrechten Striches; wodurch für die Berechnung einer Aufgabe alſo 2 Hauptſätze gebildet werden:

als 1ter Hauptſatz	2ter Hauptſatz.
2	3
*	8.

§. 81.

Jeder Hauptſatz enthält:

a. einen Hauptgegenſtand, von welchem in der Aufgabe durchaus die Rede iſt, und worauf ſich das Ganze derſelben bezieht; dieſen nennt man, „das Subject."

b. Einen Nebengegenſtand, welcher eine gewiſſe Handlung, oder den Werth, Koſten, Gewinn, Verhältniß ꝛc. des Hauptgegenſtandes anzeigt: — er heißt das Prädicat des Subjects.

c. Einen Verbindungsausdruck, welcher die Verknüpfung und Beziehung des Subjects und Prädicats gegeneinander anzeigt; man nennt ſolche das Band. Nachſtehendes Schema wird alles erläutern.

1ter Satz	2ter Satz	Anmerk.
Subject 2 Schock Stroh	Prädicat 8 Rthlr	Aus §. 80. ergiebt ſich, „daß hier ebenfalls bloß die zuſammengehörigen Glieder übereinander geſtellt ſind."
Band koſten	Band koſten	
Praedicat *(wieviel) Rthl.	Subject 3 Schock	

Dieſe Theile jedes Satzes, als Subject, Band und Prädicat, nennt man Hauptbegriffe.

Jede Aufgabe muß ſolche enthalten, ſonſt iſt ihre Auflöſung unmöglich — es fehlt ſonſt etwas von den nöthigen Stücken, welche gegeben ſeyn müſſen, um die Auflöſung möglich zu machen.

§. 82.

Nicht in jeder Aufgabe ſind die Hauptbegriffe durch ſich ſelbſt ſo vollkommen (wie vorhin) ſondern häufiger erſt noch durch andere Dinge beſtimmt, welche natürlich eben ſo gut mit angeſetzt und in Berechnung gezogen werden müſſen.

Jeder Hauptbegriff kann nemlich wieder ſeinen Nebenbegriff nnd dieſer wieder noch beſondere nähere Beſtimmungen haben.

Ein Schema wird auch dieſe Unterordnung deutlich machen; es ſoll ſolches nach einer Aufgabe entworfen werden.

Aufgabe.

In einer Woche (die Woche zu 6 Tagen, den Tag zu 12 Stunden gerechnet) verfertigen 16 Arbeiter einen Graben, welcher 360 Fuß lang, 5 Fuß breit und 3 Fuß tief iſt. Sollte nun aber ein Graben von 2000 Fuß Länge, 6 Fuß Breite und 5 Fuß Tiefe in einer Woche (die Woche zu 7 Tagen, den Tag zu 14 Stunden gerechnet,) verfertiget werden; wie viel Arbeiter muß man anlegen?

Schema.

Erſter Satz.	Zweiter Satz.
16 Arbeiter das Subject	einen Graben das Prädicat.
verfertigen . . . Band.	von
in	360 Fuß lang 5 — breit 3 — tief } Nebenbegriffe.
einer Woche Nebenbegriff.	*(wieviel) Arbeiter das Subject.
dieſe zu	verfertigen . . . das Band
6 Tagen den Tag zu 12 Stunden } nähere Beſtimmungen.	in
gerechnet	einer Woche der Nebenbegriff
einen Graben . . Praedicat.	dieſe zu
von	7 Tagen der Tag zu 14 Stunden } nähere Beſtimmungen.
2000 Fuſs lang 6 — breit 5 — tief } Nebenbegr.	gerechnet.

Vorläufige Erklärung dieſes Anſatzes:

Der Hauptgegenſtand oder das Subject der Aufgabe, waren unverkennbar die Arbeiter; ſowohl in dem einen als dem andern Haupttheile. — Das eine Subject ſind nemlich die 16 Arbeiter — das andere die * Arbeiter. — Da es nun heiſt, Arbeiter verfertigen einen Graben," ſo iſt auf=

fallend der Ausdruck, einen Graben, das Prädicat; und das Wort, verfertigen, das Band, welches das Subject und Prädicat mit einander verbindet, und ihre Beziehung auf einander ergiebt.

Das Band (hier verfertigen) ſteht in der Aufgabe aber noch mit dem Zuſatze, in einer Woche; dieſes iſt alſo ein Nebenbegriff. Die Woche ſoll aber wieder zu einer gewiſſen Anzahl Tage, und der Tag wieder zu einer gewiſſen Anzahl Stunden gerechnet werden; dieſes ſind einleuchtend nähere Beſtimmungen der Nebenbegriffe.

Satz 1, und Satz 2,
enthalten alſo jeder,

1. Ein Subject — aber hier ohne Nebenbegriff ꝛc., weil die Aufgabe für das Subject keine enthält; —

2. Ein Band — mit Nebenbegriffen und nähern Beſtimmungen derſelben, —

3. Ein Prädicat — mit Nebenbegriffen, ohne nähere Beſtimmung, weil die Aufgabe keine enthält. —

Nach derartig vollendeter Stellung der Größen, werden die auf beiden Seiten des Strichs über einander ſtehende Zahlen, in einander multiplicirt, und mit dem dadurch erhaltenen Producte der Seite mit *, in das Product der Seite ohne *, dividirt; der Quotient giebt das

Geſuchte für *, nemlich hier, die Zahl der Arbeiter. —

— So leicht wird durch dieſen ſinnreichen Anſatz die Auflöſung einer ſchon ſchweren; in die zuſammengeſetzte Regel de Tri gehörigen und dort mühſam zu löſenden Aufgabe. Sollte ein ſolcher Blick, den wiſſbegierigen Leſer nicht auf das anziehendſte aufmuntern, die wenigen Geiſtesanſtrengungen, welche dieſe Methode anfangs verlangt, mit Vergnügen und Ausdauer aufzuwenden?

§. 83.

Angehende Rechner werden gewöhnlich über den Anſatz ſo vieler, ſelbſt aus den Nebenbegriffen und nähern Beſtimmungen, mit in Berechnung zu ziehenden Zahlen, unruhig; ſelbſt geübtere, rechnen oft mechaniſch richtig, und wiſſen es ſich doch nicht einmal zu erklären, wie es möglich ſey, daß dieſe Zahlen die Auflöſung der Aufgabe mit bewirken können, alſo durchaus mit in Betracht gezogen werden müſſen.

Um nun dieſes Dunkel ihnen zu erleuchten, werden folgende Wahrheiten als Mittel dienen.

Die Proportionsglieder können bekanntlich ſo wohl aus Primzahlen als Factorenzahlen beſtehen; beyde können eine richtige Proportion bilden. Da nun (nach §. 80.) die zuſammengehörigen Glieder

auch *untereinander* geſtellt werden dürfen, ſo gilt daſſelbe auch für die *einzelnen Factoren* der Factorenzahlen.

Statt 9 : 18 = 36 : 72.

$$9 = \begin{cases}3\\3\end{cases} \quad \Big| \quad 18 = \begin{cases}3\\6\end{cases}$$

$$* \quad \Big| \quad 36 = \begin{cases}2\\3\\3\\2\end{cases}$$

Die Factoren von 18 und 36 = 3, 6, 2, 3, 3, 2, in einander multiplicirt, geben daſſelbe Product, als 18 × 36, nemlich 648. — Die Berechnung bleibt alſo, und wenn funfzig Factoren über einander ſtehen, dieſelbe.

Nun ſind aber alle durch die Nebenbegriffe und nähern Beſtimmungen in einem Anſatze ſtehende Zahlen, *vollkommen* als Factoren des Hauptbegriffs, zu *welchem* ſie gehören, anzuſehen.

Betrachtet man daher jenes ſo ſehr zuſammengeſetzte Beyſpiel des vorigen §.; ſo ſind *die* Zahlen, welche die *Länge*, *Breite* und *Tiefe* der Graben beſtimmen, bloße *Factoren* von dem Hauptgegenſtande, nemlich dem *Graben*; und *die* Zahlen, welche die *Zeit* des *Verfertigens*, beſtimmten, wiederum *Factoren* des Hauptbegriffs, *verfertigen*.

So wenig aber von irgend einem Factor, auch nur *eine* Einheit bey Berechnungen weggelaſſen werden darf; eben ſo wenig darf auch *eine* Zahl

eines Nebenbegriffs ꝛc. — Weil dieſer dieſel=
be Beziehung auf ſeinen Hauptbegriff, als der
Factor auf die Factorenzahlen hat, weggelaſſen
werden; und grade iſt bey dieſer Rechnungsmethode
die Auffindung der Factoren in dem Inhalte der
Aufgabe, und deren richtige Stellung auf dieſer
oder jener Seite — vide §. 86 — das Wichtig=
ſte: ſo wie überhaupt von der bloßen Kenntniß
des Anſatzes, die leichteſte Auflöſung der ſchwer=
ſten Aufgaben, allein abhängt.

§. 84.

Zur richtigen Bildung eines Anſatzes für alle mögliche nur vorkommende Aufgaben, ſollen die nöthigſten Vorkenntniſſe in Nachſtehendem, mitgetheilt werden.

Das Ganze zerfällt in folgende Theile.

a. Haupt- und Nebenbegriffe ꝛc. aufzufinden. — Dieſes iſt nicht durchgängig mit gleichen Schwierigkeiten verbunden. Nachdem daß ſich der Inhalt einer Aufgabe, mehr oder minder hiſtoriſch eingekleidet findet, werden die dahin abzielende Bemühungen, auch ein verhältnißmäßiges Nachdenken erfodern.

b. Die Vorbereitung der Haupt- und Nebenbegriffe zum Anſatze, wenn dieſelben in einzelnen Stücken oder Theilen angegeben ſind,

und daher zuvor durch arithmetiſche Hülfs-mittel unter einen generellen Namen gebracht werden müſſen. — Wie z. E., die Aufgaben für die Geſellſchaftsrechnung erfo-dern. —

c. Die richtige Stellung der aufgefundenen und etwa vorbereiteten Haupt- und Nebenbegriffe; ſo wie über den Anſatz überhaupt.

d. Die Auflöſung durch vorzunehmende Berech-nungen; und — Proberechnung.

e. Nützliche Abkürzung, des, zur Beſtimmung des unbekannten Gliedes erforderlichen Mul-tiplicirens und Dividirens der im Anſatze geordneten Theile.

§. 85.

Anleitung, die Haupt- und Nebenbegriffe ꝛc. aufzufinden.

A. Auffindung der Hauptbegriffe.

1. Man leſe jede Aufgabe mehrere male mit der gröſseſten Aufmerkſamkeit durch, und ſuche zuerſt den Sinn derſelben und worauf ſolche abzwecke, was nach ihrem Inhalte geſucht werden ſolle, mit Ueberzeugung vollkommen richtig aufzufinden.

2. Alle Einkleidungen und hiſtoriſche Umſtände welche nach dem Zwecke und Sinne der Auf-

gabe nicht mit in Berechnung gezogen werden können, werſe man weg, und behalte bloß die zur Verſtändlichmachung und Bezeichnung der aufgefundenen Zahlen, unentbehrlichen Worte bey. Z. B.

Aus nachſtehender Aufgabe:

„16 Klafter, altes 120 jähriges fichtenes Holz, koſten mit 2 tägigem Rückelohne, im Walde 50 Rthlr.; wie theuer wird man 6 Klafter deſſelben Holzes bezahlen müſſen?“

Werden hier alle, nicht in Berechnung zu ziehende Umſtände weggeworfen; ſo bleibt

„16 Klafter koſten 50 Rthlr. wie viel koſten 6 Klafter?“

Ferner:

Zur Sicherung eines 8 Fuß hohen Wildzauns, ſollen 100 Mann einen beträchtlichen Graben aufwerfen, welcher 10000 Fuß lang, 6 Fuß breit und 3½ Fuß tief iſt. Ein Stück von 100 Fuß Länge, 6 Fuß Breite und 3 Fuß Tiefe, wurde in derſelben Gegend mit 96 Rthlr. bezahlt; ſollte dieſer Preis und das dafür gefertigte Stück Graben nun auch hier zum Grunde gelegt werden, wie viel würde dann das Grabelohn für jenen Graben betragen?

Wirft man aus dieſem Beyſpiele alles, nicht zur Berechnung zu ziehende weg; ſo bleibt bloß,

„100 Fuß Graben von 6 Fuß Breite, 3 Fuß Tiefe koſten 96 Rth.“

Wie viel koſten 10000 Fuß Graben, von 6 Fuß Breite, aber nur 3½ Fuß Tiefe. Weder der

8 Fuß hohe Wildzaun, noch die 100 Arbeiter konnten hier in Betracht kommen, weil ſolche ſo wenig auf die Beſtimmung der Koſten für die 10000 Fuß Graben, als in Rückſicht der Koſten für die 100 Fuß Graben, in der Berechnung Einfluß haben konnten; die Koſten müſſen dieſelben bleiben, wenn des Grabens Länge, Breite und Tiefe, dieſelbe bleibt; und wenn der Wildzaun Statt 8 Fuß, 18.20,... Fuß hoch wäre; die Koſten werden für die Arbeit des Ausgrabens, nicht aber in Rückſicht der Höhe des Zauns, gegeben. Der Betrag des Grabelohns (96 Rthl.) wurde allerdings durch die Anzahl der Arbeiter, (100) beſtimmt; allein da das Arbeitslohn einmal durch ſolche beſtimmt iſt, ſo kommt dieſelbe nicht mit in Anſatz ſondern ſie ſteht nur ſtillſchweigend, unausgedrückt, mit in Beziehung auf die auszugrabende Fußzahl, da. Die Aufgabe könnte ſehr gut auch folgendermaßen ausgedrückt ſeyn:

„Wenn zur Sicherung eines 8 — 10 — 12 Fuß hohen Wildzauns, ein Graben 100 Fuß lang, 6 Fuß breit, 3 Fuß tief, von 100 Leuten für 95 Rthl. gegraben würde; wie viel Grabelohn würden dieſelben Leute für einen Graben von 10000 Fuß Länge, 6 Fuß Breite, $3\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe, erhalten?

Unverkennbar bleibt alſo die Anzahl der Grabenden im Anſatze, und alſo auch in der Berechnung ganz weg.

Auf dieſe Art durchgehe und prüfe man alle an- ſcheinlich wichtigen Gegenſtände einer Aufgabe, ſo wird das Ueberflüſſige von dem zur Berechnung Er- forderlichen, mit Leichtigkeit unterſchieden und richtig getrennt werden können.

Hat man hierin nur erſt einige Fertigkeit er- langt, welches ſelbſt mittelmäßige Uebungen bald gewähren; ſo ergeben ſich auch die Hauptbegriffe ſehr leicht.

3. Nach der kürzern Darſtellung der Aufgabe, in welcher alle hiſtoriſche ꝛc. Umſtände weggelaſ- ſen ſind, laſſen ſich auch die Hauptbegriffe um ſo viel leichter auffinden.

Man ſuche ſich die §. 81 und 82. mitgetheilten Merkmale derſelben mit Nachdenken und ganz geläu- fig bekannt zu machen. Durch dieſe Hülfsmittel, wird dann zuerſt der Hauptgegenſtand der Auf- Aufgabe, das Subject, aufgeſucht. Jede Aufgabe hat aber nach §. 87. zwey Subjecte, zwey Prädicate, zwey Bänder; alſo müſſen auch 2 Subjecte ꝛc. aufgeſucht werden.

In jedem Haupttheile kömmt ein Subject vor; das eine in demjenigen Theile, welcher die gege- benen Data, nach denen das Unbekannte ge ſucht und beſtimmt werden muß, und das andere in dem andern Theile, in welchem das Unbekannte ſelbſt vorkömmt.

Iſt nur erſt ein Subject gefunden, ſo kann das zweyte, weil beyde durchaus von gleicher Art ſind, ohne Mühe gefunden werden.

Die Auffindung des Bandes und des Prädicats, wird durch die genaueſte Kenntniß und Berückſichtigung des Eigenthümlichen des Subjects: „was von ſolchem nemlich geſagt und angegeben ſeyn könnte, erleichtert.

Man vergleiche hiermit die im §. 82. gegebene Erläuterung des daſelbſt in Anſatz gebrachten Beyſpiels.

B. Auffindung der Nebenbegriffe ꝛc.

Jeder Nebenbegriff zeichnet ſich beſonders dadurch aus, daß ſolcher ſtets eine genauere Kenntniß der Beſchaffenheit eines Hauptbegriffs, eine Erläuterung, deſſelben, u. ſ. w. angiebt; welche Data einer Aufgabe als Nebenbegriffe angeſehen werden können, und zu welchen Hauptbegriffen ſolche gehören und geſchrieben werden müſſen, kann man nur nach vorheriger Auffindung der Hauptbegriffe ſelbſt, ſicher erkennen. Die von der gehörigen Aufmerkſamkeit geleitete geſunde Vernunft, wird jedem, der nur an einige Beharrlichkeit im Nachdenken gewöhnt iſt, oder nicht ſcheut, die erforderlichen Beurtheiluugskräfte, auch für den verwickeltſten Fall, richtig anwenden laſſen.

Beſonders iſt dem Leſer das aufmerkſamſte öf⸗
tere Durchleſen und Ueberdenken, der hier ſchon be⸗
rechnet mitgetheilten Aufgaben und Uebung an ſelbſt
entworfenen oder andern noch unberechneten Bey⸗
ſpielen, zu empfehlen.

Anmerkung. Die nähern Beſtimmungen der Nebenbegriffe, ergeben ſich nach Auffindung der Nebenbegriffe ſelbſt ſehr leicht.

§. 86.

Anleitung zur richtigen Stellung der Haupt⸗ und Nebenbegriffe.

1) Jede Aufgabe enthält nach dem Vorhergehenden — vide §. 80. — zwei Hauptthelle, und durch die Art und Weiſe der Stellung ihrer Zahlgrößen, ebenfalls zwey Hauptſätze.

2) Muß jeder Hauptſatz 3 Hauptbegriffe enthalten; folglich ſowohl auf der rechten als linken Seite des Strichs, ein Subject, Band, und Prädicat ſtehen. — vide §. 81. — Sind auch Nebenbegriffe, oder wohl auch nähere Beſtimmungen derſelben da, ſo ſtehen ſolche, wie ſchon aus §. 85. bekannt iſt, unter dem zugehörigen Hauptbegriffe.

3) Das Subject, und das Band, welches letztere das zuſammengehörende Subject und Prädicat

eines Haupttheils mit einander verbindet, müſſen beſtändig auf einer und derſelben Seite des Strichs zuſammen ſtehen. Hingegen das Prädicat, jederzeit auf die entgegengeſetzte Seite in den andern Hauptſatz gebracht werden. Im 81ſten §., ſteht Subject und Band auf der einen, und das ihnen zugehörige Prädicat auf der andern Seite.

NB. Das zugehörige Prädicat! —!

Dieſes ſoll — da die Anfänger gewöhnlich in den Fehler der Verwechſelung der Prädicate, verfallen; in den berechneten Beyſpielen auf das deutlichſte, jedoch ein für allemal, erklärt werden.

Das erſte Beyſpiel obigen §. ergiebt nach ſeinem Inhalte die 2 natürlichen Haupttheile, welche im Anfange des §. 80. beſonders angemerkt ſind; —

„2 Schock Stroh, koſten; kommen § 81.
Subject Band auf die eine Seite,
„ihr Prädicat, nemlich die 8 Rthlr. (welche das „Stroh koſten ſoll)“ hingegen auf die andere Seite des Strichs; obgleich „2 Schock Stroh koſten „8 Rthlr., nur einen Haupttheil ausmacht, „ſo ſteht ſolches dennoch aber in zweyen Hauptſätzen.“ — Haupttheil und Hauptſatz, ſind alſo ja nicht zu verwechſeln, denn wie wir ſehen, ſo wird ein Hauptſatz nicht auch nur aus einem,

ſondern aus beyden Haupttheilen der Aufgabe gebildet. —

Eben ſo wird man, in dieſem Beyſpiele, das 2te Subject mit ſeinem Bande, auf der, dem erſten Subjecte und Bande entgegengeſetzten Seite, und das Prädicat dieſes zweyten Haupttheils ebenfalls in dem andern Satze auffinden; denn das Prädicat * wie viel Rthlr., ſteht nicht auf der Seite ſeines zu ihm gehörigen Subjectes und Bandes, ſondern auf der Seite des erſten Subjectes und Bandes.

In dem Beyſpiele des §. 82, ſteht ebenfalls das Subject und Band, 16 Arbeiter verfertigen, auf einer, und das zugehörige Prädicat „einen Graben, auf der andern Seite.

Kommen in der Aufgabe Namen ohne beyſtehende Zahlen, oder mit der Zahl 1, vor; ſo ſetzt man bey ſolche, ein ſtehendes Kreutz X — die 1 läßt man ganz weg. Der Stern *, iſt wie ſchon aus dem Vorhergehenden erhellet, das Fragezeichen, welches in die Stelle der zu ſuchenden unbekannten Größe geſetzt wird.

4. Da als Folge aus Nr. 2. dieſes §., in dem einen Hauptſatze nicht mehr und nicht weniger Gegenſtände und Namen als in dem andern vorkommen müſſen; ſo kann man ſich zuerſt die Namen der 3 Hauptbegriffe ꝛc. auf dieſe, einem jeden zugehörigen Seite ſchreiben; — ſiehe Nr. 3. — und dann zu jedem Namen die zugehörige Zahl hinzuſtellen.

Als:

Arbeiter verfertigen in Woche Tage Stunden Graben von Länge Breite Tiefe	Graben von Länge Breite Tiefe * Arbeiter verfertigen in Woche Tage Stunden	Schon die verſchiedene Schrift, wird mit einem Blicke erkennen laſſen, welche Begriffe ꝛc. zuſammengehören.

Uebrigens iſt es unverkennbar einerley, „welche „Glieder einer Seite oben, oder welche unten „ſtehen;“ und da dieſes auf die Berechnung keinen Einfluß hat; ſo verdient die Nebeneinanderſtellung derſelben Begriffe, — als Subject neben Subject ꝛc. — wegen der leichtern Ueberſicht, „ob alle Theile auf beyden Seiten gehörig im Anſatze ſtehen, vorzüglich empfohlen zu werden,“ als

Arbeiter verfertigen in Woche ꝛc. Graben von Länge ꝛc.	Arbeiter verfertigen in Woche ꝛc. Graben von Länge ꝛc.

5. Sind die Namen der Glieder auf dieſe Art nebeneinander geſchrieben, ſo findet man entweder a. daß beyde Seiten völlig einerley Namen haben, oder b. daß auf der einen Seite, einer oder mehrere andere Namen als auf der andern Seite ſtehen.

Ad a.

Für dieſen Fall werden jedem Namen die ihm nach dem Inhalte der Aufgabe zuſtehenden Zahlen, zugeſchrieben; wodurch der Anſatz dann ſogleich vollendet iſt.

Ad b.

Sind die Namen der Glieder verſchieden, ſo ſetze man die auf dieſer oder jener Seite fehlenden hinzu z. B.

Aus der Aufgabe, „50 Klafter Holz koſten 100 Rthlr.,“ „wie viel Gülden koſten 6 Klafter?“

Klafter	Klafter
Thaler	Gülden
Gülden	Thaler

Hierauf werden jedem Namen ſeine Zahlen zugeſchrieben, und zwar bekommen, die zur Ausgleichung hinzugeſchriebenen Namenglieder, diejenigen Zahlgrößen, welche die Gleichheit zweyer ſolcher im Verhältniſſe mit einander betrachteten Objecte, ausdrückt. In dieſem Beyſpiele, wurden Gülden und Thaler auf entgegengeſetzte Seiten zum Ausgleichen geſchrieben. Nun ſind 24 Gülden = 21 Thaler, folglich mußte 24 zu den Gülden, und 21 zu den Thalern, geſchrieben werden; als

6 Klafter	50 Klafter
100 Thaler	* Gülden
24 Gülden	21 Thaler

Anfängern, wird dieſe allerdings einige Auf-

merkſamkeit fordernde Ausgleichung, vielleicht auf folgende Art leichter auszuüben werden. In obigem Beyſpiele — könnte man nemlich auch ſagen, „der Gülden hat 21 gl., oder der Thaler hat 24 gl. die Anzahl Groſchen, welche jedem von beyden zuſteht, kömmt auf die entgegengeſetzte Seite, als

Gülden	21 gl.	oder	6 Klft.	50 Klft.
24 gl.	Thaler		100 Thlr.	* Gülden
			24 Güld.	21 Thaler

Dieſe Ausgleichung wird im ganzen Anſatze ſo lange fortgeſetzt, bis beyde Seiten nach den bekannten Grundſätzen, völlig gleiche Namen, und dieſe gegeneinander durch Zahlen, in richtigen Verhältniſſen ausgeglichen ſind; ſo werden größere und kleinere Centner, Pfunde, Ellen u. ſ. w., auf dieſelbe Art mit einander in einem Anſatze richtig beſtehn können:

Folgende 3 Beyſpiele, werden ſolches noch deutlicher ergeben.

Erſtes Beyſpiel: 30 Klafter Holz koſten 24 Rthl. Conventions-Geld, wie viel Gulden 50 Malter Holz, in Courrant Münze?

Der erſte Anblick wird nach dem Hinſtellen der Glieder-Namen, ſogleich ergeben, daß man noch mehrere Verhältniſſe derſelben kennen und in Anſatz bringen müſſe. Man muß das Verhältniß zwiſchen der Klafter und dem Malter, dem Thaler und dem Gulden, und ſelbſt dem Conventions und Courrantgelde, kennen, und berückſichtigen. Hierzu ſey

bekannt, daß 4 Klaſt. = 5 Malter; daß 24 gl. = einen Thaler, und 16 gl. = einem Gulden, und das Conventionsgeld zum Courrant, wie 16 : 17 ſteht; das heiſt, daß 16 Conventionsthaler ſo viel als 17 Courrentthaler ſind. Aus dieſer Anzahl von Objecten, läßt ſich nun ein vollſtändiger und richtiger Anſatz bilden; als

Klafter	Malter	30 Klafter	50 Malter
* Cour. Guld.	Conv. Thl.	* Cour. Gld.	24 Conv. Thl.
Malter	Klafter	5 Malter	4 Klafter
Thaler	Gulden	Thaler	24 gl.
Convent. Geld.	Cour. Gld.	16 Gl.	Gulden
		16 Conv. Gld.	17 Cour. Gld.

Facit 51 Cour. Gulden.

Eine angeſtellte Vergleichung wird ergeben, daß auf der einen Seite wie auf der andern, durchaus gleiche Namen ſtehen, und durchgehends richtige Verhältniſſe zur Ausgleichung niedergeſchrieben ſind.

Zweytes Beyſpiel. 20 Centner, à 110 Pfund, wurden in Naumburg zu 25 Gülden Meißn. bezahlt, wie viel Rthlr. wird ein Oeconom aus 1500 Centnern daſelbſt löſen, da ſein Centner nur 100 Pfund wiegt.

Centner	Centner	1500 Centner	20 Centn.
Gülden	Thaler	110 Pfund	1 Centn.
Thaler	Gülden	1 Centner	100 Pfund
		25 Gülden	* Thaler
		21 Groſch.	Gülden
		Thaler	24 Groſch.

Facit $1804\frac{1}{16}$ Rthlr.

Drittes Beyſpiel. Wenn 15 Leipziger Ellen

36 Rthlr. koſten und 6 Leipziger Ellen = 5 Brabanter und 100 Brabanter = 112 Stuttgarter, wie viel koſten 50 Stuttgarter Ellen?

Man ſieht ſogleich, daß die Hauptgegenſtände der Aufgabe und ihr Hauptzweck, zu erforſchen ſey, „daß wenn 50 Leipziger Ellen mit 36 Rthlr. bezahlt werden, wie theuer 50 Stuttgarter Ellen zu bezahlen ſind.“ Unverkennbar würden, wenn weiter nichts in der Aufgabe angegeben wäre, alle Bemühungen der Auflöſung fruchtlos ſeyn, da das Mittelverhältniß zwiſchen den Stuttgarter und Leipziger Ellen, nach welchem allein die Preiſe von beyden, welche ebenfalls im Verhältniſſe gegeneinander ſtehen ſollen, ausgemittelt werden können, fehlt. Hier iſt dieſes Mittelverhältniß aber erſt durch noch andere Zwiſchenverhältniſſe angegeben, nemlich dadurch, „daß 6 Leipziger ſo viel als 5 Brabanter, und 100 Brabanter ſo viel als 100 Stuttgarder Ellen koſten ſollen; dieſe bilden daher gleichſam ein Band, eine Kette, welche die 50 Leipziger mit den 50 Stuttgarder Ellen verbindet;* daher die Auflöſung ſolcher Zwiſchenverhältniſſe zwiſchen den beyden Subjecten enthaltenden Aufgaben, in den practiſchen Rechenbüchern den beſondern Namen die Kettenrechnung erhalten hat. Die aufmerkſame Betrachtung des Anſatzes, wird ſolches für alle ähnliche Fälle anſchaulich ergeben.

15 Leipziger	36 Rthlr.
15 Brabanter u.	6 Leipziger
112 Stuttgarter	100 Brabanter
* Rthlr.	30 Stuttgarter

Facit $77\frac{1}{7}$ Rthlr.

Viertes Beyſpiel. Ein Holzhändler kauft 3000 Spannen Holz für 2000 Rthlr., wie theuer kann derſelbe die Spanne verkaufen um 25 pro Cent zu gewinnen?

Auch hier wird es ſogleich auffallen, daß die Bedingung der Aufgabe „25 pro Cent gewinnen zu wollen“ mit in Berechnung gezogen werden müſſe. 25 pro Cent gewinnen, heißt ſo viel, als mit 100 Rthlr. eingelegtem Kaufgelde, 25 Rthlr. profitiren, alſo ſtatt 100 Rthlr. Einkaufsgeld, 125 Rthl. im Verkaufe wieder zu erhalten. Dieſe Anſicht giebt nun auch die Stellung des Anſatzes; daß man das Verhältniß, welches zwiſchen Einkauf und Verkauf ſtatt finden ſoll, richtig anſetzt; nemlich wie 100 : 125.

3000 Spannen	1 Spanne
Verkauf * Rthlr.	2000 Rthlr. Einkauf
Einkauf 100 Rthlr.	125 Rthlr. Verkauf

Facit $\frac{5}{6}$ Rthlr. = 20 gl.

§. 87.

Kommen in einer Aufgabe größere und kleinere Sorten eines Hauptbegriffs vor, als bey Thalern,

Groſchen und Pfennigen, bey Centnern, Pfunden und Lothen u. ſ. w. z. E. 3 Pfund koſten 3 Rthlr. 6 gl. 10 pf., — nemlich hier außer den Thalern, noch Groſchen und Pfennige; ſo verwandelt man die größern Sorten in die kleinern, und addirt das Ganze, wodurch ſich nur eine Hauptgröße ergiebt. — In obigem Beyſpiele 3 Rthl. 6 gl. 10 pf., alſo 3 Rthlr. mit 288 pf. = 1 Rthlr., multiplicirt und dadurch zu Pfennigen gemacht, giebt 864 pf.; und 6 gl. mit 12 pf. multiplicirt, giebt 72 Pf.; dieſe und die 10 einzelne Pfennige zu jenen addirt 864 + 72 + 10 = 946 Pf.; — alſo käme in Anſatz, 3 Pfund koſten 946 Pfennige.

Auf ähnliche Art verfährt man bey allen andern Fällen, wo Sortenverſchiedenheit da iſt.

§. 88.

Enthält eine Aufgabe Ganze und Brüche, ſo richtet man ſolche nach §. 6. pag. 8. ein; und ſchreibt den Nenner des eingerichteten Bruchs auf die entgegengeſetzte Seite (zur Auszeichnung auch wohl in eine Parentheſe), ſo verſchwinden alle Brüche im Anſatze, welches ungemeine Abkürzungen gewährt.

Folgendes Beyſpiel ſoll ſolches erläutern:

$2\frac{1}{2}$ Pfund koſten 10 Groſchen, wie viel werden 2 Pfund koſten?

$$\left\{\begin{array}{l|l} 2\tfrac{1}{2}\ \text{℔} & 2\ \text{℔} \\ \tfrac{5}{2} & 10\ \text{gl.} \\ *\ \text{gl.} & \end{array}\right\} \text{Alſo nach Vorſchrift} \left\{\begin{array}{r|l} 5\ \text{℔} & 2\ \text{℔} \\ & (2) \\ *\ \text{gl.} & 10\ \text{gl.} \end{array}\right\}$$

Facit 8 gl.

Nach §. 38. und §. 41. des reinen Proportions=ſatzes, ſtände ſolches alſo:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\tfrac{1}{2}\ \text{℔} : 2\ \text{℔} = 10\ \text{gl.} : x, \text{ und ergäbe} \\ \tfrac{5}{2} \qquad\qquad 20 : \tfrac{5}{2} = \dfrac{20\ .\ 2}{5} = \dfrac{40}{5} = 8\ \text{gl.} \end{array}\right.$$

wie vorhin.

Daß alſo dieſes Verfahren, „Brüche aus dem Anſatze verſchwinden zu laſſen,“ keine Unrichtigkeiten in ſolchem hervorbringe, wäre vollkommen durch dieſe Berechnung dargethan; allein die Gründe, woraus die Richtigkeit des Verfahrens einleuchtet, zu zeigen, iſt noch übrig.

Man drücke z. E. die Zahlgröße 40, auf zweyerley Art in Factoren zerlegt aus, — 2 . 10 . 2, und 5 . 8 — und ſtelle ſolche wie einen Rechnungsanſatz;

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ 8 & 10 \\ & 2 \end{array}$$

; werden nun die Factoren beyder Seiten, mit einer und derſelben Zahl multiplicirt, (hier. z. B. mit 2) ſo giebt 5 . 8 . 2 = 80, und 2 . 10 . 2 . 2 = 80; folglich bleibt das Verhältniß beyder Seiten gegeneinander demohngeachtet ungeändert; und gerade habe ich dieſes durch die Zahlen, welche ich zur Erläuterung wählte, für jenes Beyſpiel bewieſen; man wird alle dieſe Zahlen in ſolchem auffinden. Dadurch, daß der Nenner von $\frac{5}{2}$, auf die andere

Seite geſchrieben wurde, wurde dieſer Bruch am Werthe, zweymal größer — denn 5 dividirt durch 2 (wie doch $\frac{5}{2}$ anzeigt) giebt $2\frac{1}{2}$, 5 iſt aber = 2 . $2\frac{1}{2}$. — Die andere Seite durch die hinzugekommene Zahl 2, aber ebenfalls um zweymal größer; daher mußten beyde Seiten, im gleichem Verhältniſſe gegeneinander bleiben, und konnte die Richtigkeit des Anſatzes dadurch alſo nicht verlieren.

Man kann deshalb den Grund: warum die Nenner auf die entgegengeſetzte Seite geſchrieben werden können, darin zuſammen faſſen, daß man ſagt: „durch dieſe Verſetzung der Nenner, werden „beyde Seiten des Anſatzes mit einerley „Zahlen multiplicirt (nemlich eben mit den Zah„len der Nenner) ihre Verhältniſſe gegeneinander „bleiben alſo ungeändert und der Anſatz daher richtig.“

§. 89.

Anleitung, wie man die in Anſatz gebrachten Glieder nun behandeln müſſe, um zur Auflöſung ſelbſt zu gelangen; und wie man ſich durch eine richtige Probe, von der Richtigkeit der Auflöſung überzeugen könne.

Vorläufig wurde ſchon in den §. 82. pag. 133. geſagt, „man ſolle auf jeder Seite des Strichs, alſo in jedem Hauptſatze, die übereinander ge-

ſtellten Zahlen in einander multipliciren, dann mit dem Produkte derjenigen Seite (oder Hauptſatzes), wo der Stern ſteht, in das Produkt der Seite ohne Stern, dividiren; der Quotient ſey das Geſuchte.“

Ich wiederhole ſolches der Ordnung der Materien und des Zuſammenhanges wegen; — daß ich zum Beſten der ſich ſelbſt unterrichtenden Leſer einen ſolchen Vorſprung machen mußte, wird jeder praktiſche Pädagogiker ſogleich zugeſtehen; und darf ich deshalb alſo keinen Tadel fürchten.

Eine

Rechnungsprobe,

durch welche man ſich von der Richtigkeit des Anſatzes und der Berechnung ſelbſt, vollkommen überzeugen kann, iſt folgende:

Die gefundene unbekannte Zahl — mag ſolche auch ein Subject, Prädicat ꝛc. ſeyn — bringt man als bekannte Zahl in einen neuen Anſatz, und läßt dagegen einen vorher bekannt geweſenen Begriff ꝛc. gleicher Art, (das heiſt, iſt dieſe jetzt gefundene Zahl ein Subject, ſo bleibt das andere Subject, iſts ein Prädicat, ſo bleibt das andere Prädicat weg ꝛc.) zurück; die übrigen Theile des Anſatzes aber unverändert, und verfährt dann mit multipliciren und dividiren wie vorhin. Ergiebt ſich zum Quotienten die Zahl des bekannten, aber jetzt als unbekannt angenommenen Begriffs und Gegenſtandes, ſo war die Auflöſung vollkommen richtig; im Gegentheile aber, iſt entweder in der Berechnung,

oder ſelbſt im Anſatze gefehlt worden, wo man denn nachzuſehen hat. Z. E.

3 Pfund koſten 6 Rthlr., wie viel 6 Pf.? Man wird hier ſicher 12 Rthlr. zum Facit bekommen; berechnete man nun zur Probe:

6 Pfund koſten 12 Rthlr., wie viel 3 Pfund? ſo müßten ſich, und werden ſich 6 Rthlr. ≠, welche das 2te Prädicat ſind (12 Rthlr. war das 1te Prädicat) und als unbekannt angenommen wurde, wieder ergeben; — folglich iſt die Auflöſung richtig.

Silberſchlag ſtellt dieſe Proberechnung in ſeinem Buche, als zu mühſam und unnöthig auf; und ſagt: „man ſolle nur den Quotienten mit den Zahlen der Seite (kürzer, dem Produkte), wo das Sternchen geſtanden, multipliciren; entſtände dadurch ein Produkt, welches dem der andern Seite gleich wäre, ſo ſey die Aufgabe richtig gelößt.“

Allein; bloß von der Richtigkeit des Multiplirens und Dividirens der beyden Hauptſätze in einander, kann ſolches als Probe dienen, aber durchaus nicht für die Auflöſung der Aufgabe überhaupt; der Anſatz kann demohngeachtet, wenn auch richtig multiplicirt und dividirt iſt, falſch ſeyn; und iſt dieſer unrichtig, ſo iſt auch die Auflöſung nicht richtig, und jene vorgeſchlagene Probe nicht zureichend. Das kleine ſo eben berechnete Exempel ſoll ſolches beweiſen.

„3 Pfund koſten 6 Rthlr., wie viel 6 Pf.?"

Man ſetze	3 Pfund	6 Pf.		3 Pfund	6 Pf.
	6 Rthlr.	*	und	6 Rthlr.	3 Rthlr.
	Facit 3 Rthlr.			18 =	18.

Auch ſelbſt nach der bekannten Stellung der Proportionen:

$$6 : 3 = 6 : x \quad \text{alſo } x = 3.$$

18
6, | 3.

Es *müßten* alſo 6 Pf. nach Silberſchlags Probe, 3 Rthlr. koſten, wenn 3 Pfund 6 Rthlr. koſteten; ſelbſt die Auflöſung durch die gewöhnliche Stellung der Proportionen, ergiebt ſolches; denn nach ihm iſt *jeder Rechnungsſatz* richtig, wenn die *Proportion richtig* iſt, und das *letzte* war ja gegenwärtig der Fall, denn das Produkt der mittlern Glieder 3.6, war gleich dem Produkte der äußern Glieder, 6.3; verglichen mit §. 37, pag. 78, b. — Und demohngeachtet ſagt die geſunde Vernunft, „daß 6 Pfund *mehr*, aber nicht *weniger*, als 3 Pfund koſten müſſen: wo ſteckt alſo die Täuſchung?"

Silberſchlag hat entweder geglaubt, man könne nie im *Anſatze* fehlen, oder hat darauf gar keine Rückſicht genommen. Ferner hat derſelbe bey Anwendung des Verfahrens zu 3 Proportionsgliedern das 4te zu finden, die Mitberückſichtigung deſſen, was ich §. 41. darüber geſagt habe, nemlich:

„daß ein gewiſſes Verhältniß mit beſtimmt ſeyn müſſe, nach welchem die unbekannte Größe ausgemittelt werden ſolle,“ vorzuſchreiben vergeſſen. Nach dem Inhalte der Aufgabe, kann der Anſatz von Anfängern am bequemſten in wachſenden Verhältniſſen geſchehen. Wird nach §. 42. richtig angeſetzt, ſo hat man $3 : 6 = 6 : x$ — ; $x = 12$, richtig. So wie die Zahlgrößen der Aufgabe, wie vorhin, nach abnehmenden Verhältniſſen, wo x das hinterſte Proportional-Glied ausmacht, geordnet werden; muß das Reſultat der Auflöſung, ein Abſurdum werden.

Wir wollen die von mir als zuverläſſig empfohlene Probe, zur Prüfung der Auflöſung des 1ten Beyſpiels des 86ſten Paragraphs, hier zum letzten male anwenden.

Setzt man an die Stelle des * den Quotient 51; — welcher die geſuchte Zahl des 2ten Prädicats war, — und läßt dafür im Anſatze das 1te Prädicat, die 24 Convent. Thaler, weg; ſo ſteht die Aufgabe umgeändert, alſo:

30 Klaftern	50 Malter
51 Cour. Guld.	* Convent. Thaler
5 Malter	4 Klaftern
Thaler	24 Groſchen
16 Groſchen	Gulden
16 Gr. Conv. Geld	17 Gr. Cour. Geld.

Facit 24 Rthlr.

Folglich war auch dieſes Beyſpiel richtig aufgelößt.

§. 90.

Anleitung zur Vorbereitung der Haupt- und Nebenbegriffe zum Anſatze, wenn ſolche in einzelnen Stücken oder Theilen angegeben ſind, und daher zuvor unter ein Ganzes gebracht werden müſſen.

Daß dieſe Anleitung das Beurtheilungsvermögen des Rechners blos durch Angabe allgemeiner Geſichtspunkte unterſtützen, und keine mechaniſche Vorſchriften für die Vorbereitung der Begriffe enthalten könne, wird jeder ſelbſt nur mittelmäßig denkende Kopf abſtrahiren können: — die aufmerkſame mit Nachdenken verbundene Vergleichung, der nachſtehenden allgemeinen Winke, mit der von ſolchen in den berechneten Beyſpielen gemachten Anwendung, wird aber Jedem, welcher alles Vorhergehende gründlich verſtanden und ſich zu eigen gemacht hat, vollkommen zureichende Anhaltpuncte auffinden laſſen, ähnliche vorkommende Fälle, ſogleich mit einem richtigem Blicke zu beurtheilen.

Folgendes ſcheint mir das hier Erforderliche zu umfaſſen. —

Die Gegenſtände einer Aufgabe, können nemlich zum Theil ſo beſchaffen ſeyn, daß mehrere durch ihre Zahlgrößen zuſammengezählt, oder von einander abgezogen, in einander multiplicirt, oder dividirt wer-

den müſſen; vielleicht auch wohl mit Benutzung der Kenntniſſe einiger geometriſchen Sätze, erſt einer gewiſſen Behandlung vor der Bildung des Anſatzes bedürfen; und dieſe verſchiedenen nothwendigen Berückſichtigungen, geben nun die verſchiedenen natürlichen Abſchnitte der gegenwärtigen Anleitung beſtimmteſt an. Ordnungswidrig, allein nach meiner Ueberzeugung werde ich die allgemeinen Winke erſt auf die ſpecielle Anleitung, zur Behandlung der zerſtückelten Sätze mit practiſchen Fingerzeigen ihrer Anwendung, folgen laſſen.

Vorbereitung der Begriffe durch die Addition.

Alle diejenigen Stücke, welche nach dem Inhalte einer Aufgabe, ein Ganzes ausmachen können, nemlich Gegenſtände einerley Art, welche einzeln angegeben ſind, z. E. eine Anzahl Perſonen, in verſchiedenen Abtheilungen; ferner gleichartige Sachen, welche in einzelnen Stücken oder Theilen vorkommen, und nach gehöriger Prüfung beſtimmt nur für dieſen oder jenen Begriff (man berückſichtige, daß jede Aufgabe 2 Subjecte, 2 Prädicate, 2 Bänder hat, und jeder derſelben wieder Nebenbegriffe haben kann) paſſen,

„werden zuſammen addirt;“

die Summe giebt die in Anſatz zu bringende Zahl des, durch die Vereinigung der Zahlen der Theile nun im ganzen erhaltenen vorher zerſtückelten Begriffs.

Erläuterung durch Beyſpiele.

Erſtes Beyſpiel. Vier Perſonen A. B. C. D. legen zu einem gewiſſen Handel eine Summe Geldes zuſammen; A., giebt 2000, B., 1000, C., 600, D., 8000 Rthlr.; ſie gewinnen 1800 Rthlr., wie viel muß jeder nach Verhältniß der Größe ſeines eingelegten Capitals, vom Gewinne bekommen?

Auflöſung.

Man wird ſogleich bemerken, daß das zum Handel eingelegte Geld, das Subject ſey, und da mit der ganzen gemeinſchaftlich angelegten Summe, der Gewinn erworben iſt; folglich auch dieſe, in verſchiedenen Capitalen von den 4 Intereſſenten angelegte Gelder, Stücke des Subjects, „der gemeinſchaftlich zum Handel beſtimmten Summe, ſind, alſo zuſammen addirt werden müſſen, um die ganze Handelsſumme, als Zahl des Subjects, in Anſatz bringen zu können.

Dieſe verſchiedenen Einlagen von A = 2000,
— B = 1000,
— C = 600,
— D = 8000,

ergeben die Summe von 11600 Rthlr.

Da nun jeder Intereſſent ferner, nach dem Verhältniſſe der Größe ſeines eingelegten Capitals, ſeinen Gewinn-Antheil beſtimmt erhalten ſoll, und nach Billigkeit auch beſtimmt erhalten muß; ſo folgt der Anſatz durch dieſe leichte vernunftmäßige Anſicht

der Aufgabe ſehr leicht, und kann man ſolche jetzt alſo ausdrücken:

„Wenn 11600 Rthlr. 1800 Rthlr. gewinnen, „wie viel hat der Antheil von A, 2000 Rthlr., „gewonnen?“

Einlg. 11600	Einlage 2000
Gewinn *	Gewinn 1800

Facit $310\frac{10}{29}$

Nun ſucht man den Antheil des B C D, auf dieſelbe Art.

Alſo

A	erhält	=	$310\frac{10}{29}$
B	—	=	$155\frac{5}{29}$
C	—	=	$93\frac{3}{29}$
D	—	=	$1241\frac{11}{29}$

Summa der berechneten Antheile = 1800

Zweites Beyſpiel. Es befindet ſich an einem öffentlichen Orte eine Geſellſchaft von 6 Herren und 8 Frauenzimmer; die an den Wirth gemeinſchaftlich zu bezahlende Summe, beträgt 14 Rthlr., wie viel muß jede Perſon zahlen?

Auflöſung.

Hier ſind die Perſonen das Subject; es kömmt zerſtückelt in den Abtheilungen 6 und 8 vor, alſo $6 + 8 = 14$. Nun heißt es

Perſon 14	X Perſon
Rthlr *	14 Rthlr.

Facit 1 Rthlr.

Aufgaben, in welchen die Stücke der Begriffe als ganze Zahlen vorkommen, werden ſo leicht Niemanden wegen des Verfahrens in Ungewißheit ſetzen; allein Aufgaben, in welchen ſolche als Brüche vorkommen, haben wenigſtens für den Anfänger ein myſtiſches Anſehn, ob ſolche gleich grade auf die-

ſelbe Art als jene behandelt werden; und glaube ich darüber noch Folgendes bemerken zu müſſen:

a. Alle Bruchtheile werden auf einerley Benennung gebracht und addirt;

b. ſind noch beſonders auch ganze Zahlen ꝛc. welche zu demſelben Begriffe gehören, gegeben, ſo werden ſolche als Theile des Ganzen, welches in Bruchtheilen ausgedrückt werden muß — vide ſeq. c, und beſonders das zweyte Beyſpiel — zu der Bruchſumme addirt.

c. Das Ganze, welches in ſolchen Aufgaben jederzeit ein Subject, und größtentheils das zweyte Subject iſt; drücke man durch einen Bruch mit dem Nenner jener ſummirten Brüche aus; iſt dieſer nemlich 13, ſo ſetzt man das Ganze = $\frac{13}{13}$ ꝛc.

d. Der Anſatz ſelbſt, wird hierauf faſt jederzeit alſo ausgedrückt werden können:
„Die Theile NN koſten, geben, ſind ꝛc.
„ſo und ſo viel; was koſtet ꝛc. das
„Ganze N? Oder umgekehrt, das Ganze N ꝛc.
„beträgt ꝛc. ſo und ſo viel, wie viel die Thei-
„le N.“

Erläuterung durch Beyſpiele.

Erſtes Beyſpiel. Drey Kaufleute legen ein Capital zu einem Handelsgeſchäft an, ſo, daß A, $\frac{3}{8}$, B, $\frac{1}{8}$, und C, $\frac{4}{8}$, deſſelben, hergiebt; ſie gewinnen 1000 Rthlr.; wie viel bekömmt jeder?

Auflöſung.

Das Capital iſt das Subject, ſeine Theile ſind die Brüche; alſo $4 + 3 + 1 = \frac{8}{8}$ die Zahl des Subjects und der Ausdruck des Ganzen; alſo

Das ganze Capital $\frac{8}{8}$ Gewinn *	$\frac{3}{8}$ Theil des Capitals 1000 Gewinn	Oder nach §. 88. die Bruch-Nenner verſetzt,

$$\frac{\begin{array}{r} 83 \\ * \ 1000 \end{array}}{\text{Fac. } 375 \text{ Rth.}}$$

Auf dieſelbe Art den Antheil des B und C geſucht,

A	erhält	=	375
B	—	=	125
C	—	=	500
Antheils Summe		=	1000 Rthlr.

Zweytes Beyſpiel. Ein Lehrer wurde gefragt, wie viel Schüler ſeinen Unterricht genöſſen; er antwortete:

„Wenn derſelben noch einmal ſo viel, noch „zweymal ſo viel und $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{4}{9}$ ſo viel wären, als „jetzt da ſind, und noch 5 dazu, ſo würden „ihrer 100 ſeyn:“

Wie viel Schüler warens?

Auflöſung.

Die Anzahl der Schüler, welche man zu wiſſen wünſcht, iſt unverkennbar das Subject. Nach dem Inhalte der Aufgabe wird hier das Ganze, welches in Bruchform in Anſatz kömmt, das zweyte Subject. Das erſte Subject ſteht zerſtückelt durch die Ausdrücke

„einmal, zweymal ſoviel, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{4}{9}$ und 5

bezeichnet, weil dieſes zuſammengenommen, ja der Anzahl der Schüler gleich ſeyn ſoll; folglich

müſſen dieſe Stücke zuſammenaddirt werden; dieſes Addiren erfordert aber einige Vorſicht und Reflection beym Verfahren; man durchdenke alſo die nachſtehende gründliche Entwickelung deſſelben, mit gehöriger Aufmerkſamkeit.

Nach a, iſt es rathſam, zuerſt die Brüche zu addiren; nach b und c, drückt man nachher das Ganze (oder *bezeichnet* vielmehr das Ganze, welches die zu findende Zahl der Schüler iſt) durch einen ſolchen Bruch aus, deſſen *Nenner* der gemeinſchaftliche Nenner der addirten Brüche iſt; hier iſt die Bruchſumme $\frac{23}{18}$, folglich die Bezeichnung des Ganzen $\frac{18}{18}$.

Nun wird ferner geſchloſſen; —

„Da $\frac{18}{18}$ die noch unbekannte Anzahl der Schüler bloß bezeichnet, und bey dem Ganzen, gleichſam als ein die unbekannte Größe bezeichnendes x, ſteht; ſo muß ſolches nach dem Inhalte der Aufgabe, *ein* und *zweymal* genommen, und zu $\frac{23}{18}$ addirt werden; jedoch darf man (wie mehrere Anfänger ſolches gewöhnlich überſehn) nicht vergeſſen;

„Die gleichſam als x bezeichnende $\frac{18}{18}$, der
„da ſeyn ſollenden Schüleranzahl, mit hinzu-
„zurechnen. Der Additionsſatz wäre deshalb:

Das Ganze $= \frac{18}{18}$
Daſſelbe noch einmal $= \frac{18}{18}$
— — — zweymal $= \frac{36}{18}$
Summa $\frac{72}{18}$

$\frac{72}{18} + \frac{23}{18} = \frac{95}{18}$.

Jetzt fehlt nun zur vollkommenen Ergänzung des Subjects, die noch zu addirende Zahl 5.

Nach b, ſoll ſolche zu $\frac{95}{18}$, addirt werden; — aber — iſt es nicht Widerſpruch, daß eine ganze Zahl (hier 5) die zur Ergänzung des Subjects fehlende Bruchtheile, ergänzen ſoll? Ja es iſt ſelbſt unmöglich, da Theile von einer Größe, bloß durch die fehlenden Theile gleicher Art, zu ihrem Ganzen ergänzt werden können, auch kann das Ganze als | ſolches an ſich betrachtet, kein Bruchtheil ſeyn; alſo auch Bruchtheile nicht ergänzen.

Allein hier wird die Zahl 5 (und ſo in jedem ähnlichen Falle jede andere Zahl) nicht als ein Ganzes an ſich betrachtet, ſondern in Beziehung auf den Ausdruck $\frac{18}{18}$; und ſo iſts kein Widerſpruch. Man nehme einmal an, die Zahl der Schüler, welche geſucht wird, ſey 25; ſo müßte obige 5, durchaus von 25, auch 5 Theile enthalten; denn 25 bezeichnet die Perſonenanzahl und 5 nach der Aufgabe, ebenfalls Perſonen. Denken wir uns die Zahl 25 aber in 18 Theile getheilt, und laſſen die Zahl 5 in derſelben Beziehung auf dieſe Theile wie auf jene 25; ſo muß ſolche auch einleuchtend, 5 Theile von jenen 18 Theilen enthalten; alſo weil das Ganze $\frac{18}{18}$; $5 = \frac{5}{18}$, ſo addirt man die Zahl 5, bloß zum Zähler von $\frac{95}{18}$, als $\frac{95+5}{18} = \frac{100}{18}$ oder $\frac{95}{18} + \frac{5}{18} = \frac{100}{18}$.

Jetzt iſt Alles zum Anſatze gehörig vorbereitet, und dieſer nun ſehr leicht anzuſtellen; man hat,

„$\frac{100}{18}$ geben die Zahl von 100 Schülern, wie „viel Schüler $\frac{18}{18}$?“

$\frac{100}{18}$	$\frac{18}{18}$
*	100

die Nenner verſetzt

100	18
*	100
(18)	(18)

Facit 18.

Alſo 18 Schüler, hatte der Lehrer. —

Anmerkung. Die Erfahrung, (aus einem vielfachen Unterrichte, welchen ich jungen Leuten ertheilte, geſchöpft,) lehrte mich alle diejenigen Klippen kennen, wovor oft die fähigſten Köpfe ſtutzig werden, und ſich nicht über ſolche hinweg zu helfen wiſſen. Auch ähnliche Aufgaben als dieſe ſo eben berechnete, enthielten für Lehrlinge manchen Stein des Anſtoßes; und ich glaubte deshalb auch ſchon in dieſer Rückſicht, die vollſtändigſte Erläuterung der ſo eben mitgetheilten Auflöſung, geben zu müſſen; und werde mich bey den nachfolgenden deſto kürzer faſſen können.

Vorbereitung durch die Subtraction.

§. 91.

Nach der ausführlichen Erklärung des Verfahrens für Fälle der Addition, werde ich in dieſer Anleitung für die Subtraction, leichter verſtanden werden, und kürzer ſeyn dürfen.

Kommen nemlich in einer Aufgabe, Subject und Prädicat, (wie in der Addition gezeigt wurde) ſtückweiſe vor, aber dergeſtalt:

„daß Theile derſelben, entweder nicht mehr „zum Ganzen gerechnet werden können, oder „in entgegengeſetzter Beziehung gegeneinander „ſtehn, ſich einander vermindern ꝛc. als z. E. „Einnahme und Ausgabe, Einflieſſen und Aus„flieſſen, Vor- und Rückwärtsgehn ꝛc., ſo muß „man die Subtraction bey ſolchen Gegenſtän„den, zur Entwickelung der erwähnten Be„griffe, anwenden.“

a. Die dem Ganzen nicht mehr zugehörende Theile, werden vom Ganzen abgezogen, und

b. die entgegengeſetzten Theile, um einander vermindert.

Der Reſt, iſt der geläuterte vorbereitete Begriff:

Erläuterung durch Beyſpiele.

Erſtes Beyſpiel. Ein Kaufmann hinterläßt ſeinem Sohne 8000 Rthl.; jedoch zugleich mehrere Thaler Schulden. Der Sohn muß nemlich 576 Rthl. Schulden bezahlen, und dem Fiskus 30 Rthlr. Gebühren, und 68 Rthlr. Abzugsgelder; das ihm übrig bleibende Geld verwendet er im Handel, und gewinnt damit 600 Rthlr.; wie viel würde er mit 6000 Rthlr. Anlage zum Handel, gewinnen?

Auflöſung.

Der Inhalt und Zweck der Aufgabe, iſt leicht zu faſſen. — Mit dem nach Abtragung der ſämmtlichen Geldſchulden, übrig bleibenden Capital, ge-

winnt der Sohn 600 Rthlr., wie viel mit 6000 Rthlr.

Alſo müſſen, 576 Rthlr. Schulden
30 — Fiscus
68 — Abzugsgeld

Summa = 674 Rthlr., von 8000 Rthlr. Erbſchafts Capital, abgezogen werden: alſo 8000 — 674 = 7326 Rthlr., welche übrig bleiben; ſie ſind die Zahl des erſten Subjects. Der Anſatz iſt alſo leicht:

7326 Rthlr. Anlage	10000 Rthlr. Anlage
* Gewinn	600 Rthlr. Gewinn.

Facit 818 $\frac{6332}{7326}$ Rthlr.

Zweytes Beyſpiel. Ein Teich in einem Garten hat 2 Röhren, welche den Einfluß und Abfluß ſeines Waſſers befördern. Die eine läſt alle Stunden 24 Eymer zu; und die andere 20 Eymer abfließen; in wie viel Stunden wird der Teich, wenn ſolcher leer iſt, da er 600 Eymer faßt, angefüllt werden?

Auflöſung.

Hier mindert ſich der Einfluß durch den Ausfluß; alſo 24 — 20 = 4, es bleiben alſo im Teiche 4 Eymer in einer Stunde zurück Man kann alſo ſchließen,

„in einer Stunde laufen 4 Eymer zu, in wie „viel Stunden 600 Eymer?“

Alſo X Stunden	* Stunden
600 Eimer	4 Eymer

Facit 150 Stunden.

Drittes Beyſpiel. Drey Brüder beerben eine Schweſter nach Vorſchrift eines Teſtaments. A ſoll $\frac{1}{4}$, B $\frac{2}{5}$, C $\frac{1}{7}$ der Erbſchaft bekommen; es bleiben 12000 Rthlr. Legate übrig, wie groß war die Erbſchaft?

Aufloſung.

Die Bruchtheile werden zuerſt zuſammenaddirt; ſie geben $\frac{111}{140}$. Das Ganze in Bruchform ausgedrückt, iſt $= \frac{140}{140}$. Nun ſollen doch die Erbſchaftstheile mit dem Reſte zu Legaten, der ganzen Erbſchaftsmaſſe gleich ſeyn; alſo ziehe man $\frac{111}{140}$ von $\frac{140}{140}$ ab, ſo ergiebt die Differenz $= \frac{29}{140}$, die Theile für die Legaten , Summe 12000 Rthlr. Jetzt ſagt man, „$\frac{29}{140}$ geben 12000, wie viel $\frac{140}{140}$?“ Facit $= 54482 \frac{22}{29}$ Rthlr.

Viertes Beyſpiel. Der berühmte griechiſche Algebraiſt Diophant, lebte nach der Aufſchrift ſeines Leichenſteins, $\frac{1}{6}$ Jahr als Knabe, $\frac{1}{12}$ als Jüngling; nach $\frac{1}{7}$ ſeiner Jahre verheirathete er ſich und zeugte 5 Jahr nachher einen Sohn, der nur halb ſo alt als ſein Vater (dieſer Diophant) wurde, welcher ſeinen Tod noch 4 Jahre beklagte: wie alt wurde Diophant?

Aufloſung.

Die angegebenen Theile ſeiner Lebensjahre müſſen dem Ganzen ſeiner Lebenszeit doch gleich geweſen ſeyn; das heißt, „er lebte $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{7}$ und 5 Jahre und 4 Jahre; die Summe dieſer Theile, $\frac{75}{84}$ + 9, kann man dem unbekannten Alter, x Jah-

ren, alſo gleich ſetzen. Da nun zur Ergänzung des Bruchs $\frac{75}{84}$ zum Ganzen, nur $\frac{9}{84}$ fehlen, (denn $\frac{75}{84} + \frac{9}{84} = \frac{84}{84}$) und die Zahl 9 dieſen Bruch doch ergänzen ſoll (es ſoll ja $\frac{75}{84} + 9$, dem ganzen unbekannten Alter gleich ſeyn) ſo iſt $9 = \frac{9}{84}$. Das ganze Alter durch $\frac{84}{84}$ ausgedrückt; läßt ſich nun folgendermaaßen ſchließen.

„$\frac{9}{84}$" Jahre ſind 9 Jahre, wie viel Jahre ſind $\frac{84}{84}$?

Facit 84.

Denn	$\frac{9}{84}$	$\frac{88}{84}$	oder	9	88
	*	9		*	9
				(84)	(84)

Anmerkung. Vor dem Uebergange zu dem nächſten §. glaube ich diejenigen, welche ſich Silberſchlags Anleitung etwa ſelbſt kaufen möchten, darauf aufmerkſam machen zu müſſen: „daß darinne pag. 67. 2ten Abſchnitts, 5ten Capitels, Anleitung zur Stellung der Rechenſätze durch die Addition, ein Irrthum ſteht."

In der 4. 5. 6ten Zeile von unten, heißt es nemlich:

„wo 3 ſolcher Brüche vorhanden, da läßt ſich der allgemeine Nenner nur halbiren, (d. h. daſelbſt „nicht kleiner ausdrücken, als das Product ſämmtlicher Bruchnenner ineinander durch 2 dividirt, ergiebt)."

Allein man ſuche nach meiner Anleitung §. 10., den kleinſten Hauptnenner von $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{36}$, ſo wird man ſolches falſch finden: denn das Produkt der Nenner 2. 18. 36 iſt 7776;

und giebt durch 2 dividirt die große Zahl 3888, zum General-Nenner; da doch ſolcher auf 216 reducirt werden kann.

Denn $\frac{1}{12}$ $\frac{5}{18}$ $\frac{7}{36}$	18
6 1 2	2
1	6
	216 General-Nenner.

Ferner; in dem nächſtfolgenden dritten Abſchnitte §. 6., heiſt die Ueberſchrift:

„der dritte Fall mit Brüchen iſt der, wenn Brüche von Brüchen abzuziehen ſind.“

Dieſer Ausdruck iſt höchſt unrichtig, und könnte den Anfänger zu unrichtigen Rechnungen verleiten, ihn wenigſtens ſchwankend machen, ob er meiner Anleitung — vide pag. 18. — oder Silberſchlagen folgen ſolle.

Die daſelbſt von ihm angegebene Regel nach der zu unbeſtimmt und allgemein ausgedrückten Ueberſchrift angewandt, würde, $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{4}$ abgezogen, $1 . 2 = 2$, und $4 . 4 = 16$, alſo $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ geben; welches offenbar falſch; es ſollte $\frac{1}{4}$ Reſt bleiben, oder $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ gäbe $\frac{6}{12}$, da es nach pag. 18. nur $\frac{1}{12}$ beträgt.

Bloß für den Fall iſt die dort mitgetheilte Regel richtig, und beabſichtigt, „den Reſt eines Bruches zu finden, wenn ein gewiſſer Theil deſſelben, oder mehrere, von ihm hinweg genommen werden“, oder dieſer gewiſſe Theil in kleineren Namenſorten, als der Name ſolches Bruchs anzeigt, gefunden werden ſollen. Z. E. ich trage den 3ten Theil meiner Schulden, welche $\frac{5}{6}$ Thaler ſind, ab; wie viel beträgt ſolcher, und wie viel bleibt Reſt?

Alſo muß ich von $\frac{5}{6}$ den 3ten Theil oder $\frac{1}{3}$ ſuchen — dieſer Bruch iſt folglich gegen das Drittheil als ein Ganzes anzuſehen; und man erhält $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$, und da $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$; ſo bleibt Reſt $\frac{10}{18}$. Im 14ten §. habe ich auch dieſen Fall ſchon umfaßt.

§. 92.

Vorbereitung durch die Multiplication.

Die Anwendung der Multiplication zur Vorbereitung der Begriffe, wird man in allen Aufgaben, deren Inhalt ſolches fordert, an folgenden Merkmalen erkennen.

1) Iſt das Subject oder Prädicat zerſtückelt angegeben; eben ſo iſt ferner

2) auch ſelbſt der Nebenbegriff, und zwar dergeſtalt zerſtückelt angegeben, daß jedes Stück deſſelben zu einem beſondern Theile des Hauptbegriffs gehört.

Erſtes Beyſpiel. Zwey Kaufleute legen ein Capital von 6000 Rthlr. zuſammen, und verdienen in 1 Jahre damit 800 Rthlr. Allein der eine, B, wurde erſt in den letzten 3 Monathen mit ſeinem Capital von 4000 Rthlr. Compagnon; wie viel wird nun jeder, nach Billigkeit und Recht, vom Gewinne verlangen können?

Auflöſung.

Die 6000 Rthlr. wurden in 2 Terminen angelegt; 4000 Rthlr. nur auf 3 Monathe, 2000 Rthlr. aber auf 9 Monathe. Da nun der Antheil des Gewinnes für jeden dieſer beyden Kaufleute A und B, auch noch außer der Berückſichtigung der Größe des angelegten Capitals, billig nach der Länge der Zeit, daß ſolches in dem Handel benutzt wurde, beſtimmt werden muß; (weil ein Capital, welches 9 Monathe ſteht, auch einen 9 mal ſo ſtarken Gewinn, als das, welches nur 1 Monath ſteht, eintragen kann) ſo muß man jedes Capital mit der Zeit, wie lange ſolches im Handel ſtand, deshalb multipliciren, da die Zahl der Zeit der Benutzung, das eingelegte Capital, als ein Capital betrachten läßt, welches ſo viel mal größer wäre, als die Zahl der Benutzungszeit Einheiten enthält und anzeigt.

Das Capital von 2000 Rthlr. 9 Monathe lang benutzt, gewinnt ſo viel und iſt eben ſo anzuſehen, als ein Capital von 18000 Rthlr., welches 1 Monath lang ſteht; und das Capital von 4000 Rthlr. auf 3 Monath Einlage, als ein Capital von 12000 Rthlr.

Aus dieſen Gründen läßt ſich einſehen, daß man das Product aus den Monathen in die Capitalien (in dieſem Beyſpiele) als die Zahl eines bloßen angelegten Capitals, anſehen könne. Das Product 18000, kann alſo als ein von A-, und das Pro-

duct 12000, als ein von B auf gleiche Zeiten angelegtes Capital betrachtet und in Anſatz gebracht werden. Man muß daher obige zu verſchiedenen Zeiten eingelegte verſchiedene Capitalien, in ihren Producten, welche die Einlagen 18000 und 12000, für gleiche Zeiten geben, addiren, und ſagen: „die ganze Einlage, 30000 Rthlr., trug einen Gewinn von 800 Rthlr., wie viel die Einlagen von 18000 und 12000 Rthlr.?“

30000	18000	und	30000	12000
*	800		*	800
Facit 480			Facit 320	

480
320
800 Rthlr.

Nach der Erläuterung des ganzen Ganges einer Auflöſung, werden, glaube ich, nachfolgende Regeln deſto verſtändlicher erſcheinen, und deren Anwendung mit wenigen Worten in einem leichter zu überſehenden Zuſammenhange gezeigt werden können.

Regeln.

1) Jeder Theil des zerſtückt angegebenen Hauptbegriffs, muß mit dem ihm zugehörigen Theile des ebenfalls zerſtückt angegebenen Nebenbegriffs, multiplicirt, und

2) die daher entſtehende Producte zuſammen addirt werden.

In obigem Beyſpiele war das Subject das eingelegte Geſammtcapital; zerſtückt war ſolches in den Theilen 4000 und 2000 angegeben; der Ne-

benbegriff dieſes Subjects war die **Zeit** der Benutzung im Handel, nemlich 1 Jahr oder 12 Monathe; die Stücke, in welchen er angegeben war, waren die ungleichen Zeiten der Einlage, 9 Monathe nnd 3 Monathe.

Der eine Theil des Subjects, die Zahl 4000, wurde mit dem zu ſolchen gehörigen einem Theile des Nebenbegriffs, nemlich der Zahl 3, und eben ſo der **andere** Theil des Subjects, die Zahl 2000, mit dem zu ihr gehörigen andern Theile des Nebenbegriffs, der Zahl 9, multiplicirt; und beyde Producte zuſammen addirt.

Zweytes Beyſpiel. Für die Benutzung einer Wieſe, welche 22 Stück Ochſen zu verſchiedenen Zeiten und auch in verſchiedener Anzahl, beweiden; müſſen 300 Rthlr. Weidegeld bezahlt werden; wie viel muß der Eigenthümer A, welcher 6 Ochſen 5 Monathe; B, welcher 5 Ochſen 3 Monathe; C, welcher 5 Ochſen 5 Monathe und D, welcher 6 Ochſen 2 Monathe weiden läßt, Beytrag geben?

Auflöſung.

Hier iſt es ſchwer, die Hauptbegriffe beſtimmt heraus zu heben. Die Ochſen ſind das Subject, welches in der Verſchiedenheit der Anzahl, wie ſolche weiden, in 4 verſchiedenen Theilen zerſtükkelt, angegeben iſt; der Nebenbegriff iſt die **Zeit**, welche die Weideberechtigten ihr Vieh weiden laſſen; allein bloß in ſeinen Stücken ausgedrückt: „der verſchiedenen Monathzahl.“

Nach denen am Ende des vorigen Beyſpiels angegebenen Regeln, muß jeder Theil des Hauptbegriffs multiplicirt werden; alſo die Zahl der Ochſen mit der Zeit der Weide; und man erhält $6.5 = 30$, $5.3 = 15$, $5.5 = 25$, $6.2 = 12$. Da nun die Weide von 6 Stück Ochſen auf 5 Monathe, in gleichem Verhältniſſe mit der Weide von 30 Stück auf 1 Monath ſteht; ſo können die hier erhaltenen vier Produkte, zuſammengenommen, als eine in verſchiedenen Poſten angegebene Geſammtzahl von Ochſen, welche auf gleiche Zeit die Weide genoſſen haben, angeſehen, folglich ebenfalls nach jenen Regeln addirt werden. Die Summe der Produkte iſt = 82; man ſchließt nun:

„82 Stück geben 300 Rthlr. Weidegeld, wie viel die Stücke des A, 30; des B, 15; des C, 25; des D, 12;“

82	30	82	15	82	25	82	12
*	300	*	300	*	300	*	300
Fac. $109\frac{62}{82}$		Fac. $54\frac{72}{82}$		Fac. $91\frac{38}{82}$		Fac. $43\frac{74}{82}$ Th.	

Die Zahlung des Weidepachts geſchieht alſo folgendermaßen:

A,	zahlt für	6 Stück	auf	5 Monath,	=	$109\frac{62}{82}$ Rth.
B,	—	— 5	—	— 3 Monath,	=	$54\frac{72}{82}$ —
C,	—	— 5	—	— 5 Monath,	=	$91\frac{38}{82}$ —
D,	—	— 6	—	— 2 Monath,	=	$43\frac{74}{82}$ —
					Summa =	$297.\frac{246}{82}$ Rthlr.

Drittes Beyſpiel. Es leihet Jemand zur Verbeſſerung ſeiner Güther ein Capital von 14000 Rthlr., und verſpricht ſolches in einzelnen Poſten und zu verſchiedenen Zeiten wieder zu bezahlen. Nemlich 3000 Rthlr. in 3 Jahren, 6000 Rthlr. in 5 Jahren, 4000 Rthlr. in 6 Jahren, und 1000 Rthlr in 7 Jahren, mit gewiſſen Zinſen. Allein früher als der Anleiher erwartete, befindet ſich derſelbe in der Lage, jene Schuld wieder abtragen zu können, und wünſcht das Ganze auf einmal zu bezahlen: wie bald wird er ſolches, ohne ſich, oder den Creditor nachtheilig zu handeln, thun können?

Auflöſung.

Bey dieſer Zurückzahlung iſt beſonders zu berückſichtigen, daß Creditor und Debitor beyderſeits nichts verlieren; der Hauptgegenſtand der Aufmerkſamkeit ſind alſo einleuchtend die Zinſen, welche jenes Capital in den Zeiten der verſchiedenen Poſtenzahlungen auflaufen würden: man erforſcht ſolche, wenn die einzelnen Poſten des Capitals in die Zeiten ihrer Verleihung multiplicirt, die daher entſtehende Producte zuſammenaddirt werden, und angeſetzt wird, „100 Rthlr. geben die „accordirten Procente, wie viel Procente geben „jene Productenſumme." Hier, wo man blos die Zeit der unnachtheiligen Zurückzahlung zu wiſſen wünſcht, iſt die Kenntniß des Zinſenbetrags nicht nothwendig; aber doch die Kenntniß eines Capitals, welches ſolchen auf einmal hervorbringt. Dieſes Capital iſt obige Productenſumme, wie

man ſich aus den Erläuterungen ähnlicher Auflöſungen ſchon ſelbſt unterrichten und überzeugen kann.

Tiefer liegen dem Blicke des Anfängers die Merkmale und Stellung der ſämmtlichen Begriffe zum Anſatze, verborgen; daß das Capital das Subject ſeyn müſſe, fühlt er, und glaubt nun ſchon den Anſatz gefunden zu haben; er ſagt:

† „Das Capital aus der Productenſumme, erfordert 1 Jahr zur Abzahlung um die erforderlichen „Zinſen zu geben; in wie vielen Jahren kann das „wirklich ausgeliehene ganze Capital dieſelben Zinſen „hervorbringen, und alſo zurückgezahlt werden;“ und ſetzt treuherzig an,

70000	14000
* Jahre	1 Jahr
X Intereſſe	X Intereſſe

allein der Ueberblick des Anſatzes, „daß nach ſolchem weniger als 1 Jahr herauskommen müſſe, überzeugt ihn ſogleich von deſſen Unrichtigkeit.“ Die vorhergehenden Folgerungen †, bleiben nach allen Prüfungen richtig; und demohngeachtet iſt der Anſatz falſch; alſo dieſer iſt zu verbeſſern; Gleichheit der Gliedernamen beyder Seiten, findet man auch; alſo muß der Fehler entweder in der unrichtigen Beſtimmung der Begriffe, zu Subjecten, Prädicaten, Bändern, Nebenbegriffen ꝛc, oder in Verſetzung derſelben auf die entgegengeſetzte Seite, oder in beyden zugleich liegen. Daß die Capitalien allerdings die Subjecte, ſeyn müſſen, überzeugt man ſich bald; eben ſo leicht, daß die Namen, „Jahre,“

auf keinen Fall das Band ſeyn können, ſondern daß dieſes ein, die Verbindung und Beziehung des Subjects und Prädicats mit und zu einander, bezeichnendes Wort ſeyn müſſe; als „erfordern, bringen hervor ꝛc. — 70000 Rthlr. bringen in 1 Jahre ein gewiſſes Intereſſe hervor ꝛc.“ —

Es ſteckt der Fehler alſo ſicher in dem Anſatze der Jahre und der Intereſſe. Da nun die Zeit des Hervorbringens, durchaus auf das Intereſſe nicht gezogen werden kann, da dieſes eine Folge von der Zeit des Ausleihens iſt; ſo muß ſolches ein Nebenbegriff eines andern Hauptbegriffes ſeyn, und unverkennbar „Intereſſe, das Prädicat ſeyn.“ Zu keinem andern Hauptbegriffe aber, als dem Bande „hervorbringen, kann die Zeit“ Jahre gehören; (ſchon pagina 132 und 133 wird man in dem dortigen Schema und deſſen Erläuterung, einen ähnlichen Fall finden) und da das Prädicat mit ſeinen Nebenbegriffen und nähern Beſtimmungen, nach §. 86. Nr. 3., mit ſeinem zugehörigen Subjecte, auf einer Seite ſtehen muß; ſo kömmt 70000 Rthlr. und 1 Jahr unter einander auf die eine, und 14000 Rthlr. und * Jahre auf die andere Seite des Strichs zu ſtehen.

Als:

70000 Rthlr. (Subject)	14000 Rthlr. (Subject)
bringen hervor (Band)	bringen hervor (Band)
in	in
1 Jahre (Nebenbegriff)	* Jahre (Nebenbegriff)

Facit, 5 Jahre.

Anmerkung: Auch wegen dieſer ausführlichen Erläuterung, fürchte ich keinen Tadel; Lehrer geben ihren Zöglingen, oder der ſich ſelbſt Unterrichtende ihm ſelbſt, nur ähnliche Aufgaben auf, und man wird ſich überzeugen, daß dieſe Auflöſung beſonderes Nachdenken erfordere, und mir für jene Anleitung zum Aufſuchen der Fehler im Anſatze ꝛc. ſelbſt Dank gebühre.

§. 92.

Ueber die Vorbereitung durch die Diviſion, kann ich aus dem Grunde nichts mittheilen, da ich mich nach wiederholten Berechnungen und Nachdenken, feſt überzeugt habe, „daß es nur außerordentlich wenige Fälle giebt, wo ſolche nothwendig wird, und zwar in Aufgaben, die faſt allein in die Claſſe der künſtlichen, nicht der, des Geſchäftslebens gehören, das von Silberſchlag angeführte Beyſpiel, enthält nicht ſowohl Begriffe, welche durch die Diviſion vorbereitet werden müſſen, ſondern es enthält vielmehr eine Aufgabe, deren Auflöſung ſchon gewiſſe geometriſche Begriffe und Sätze vorausſetzt, und ſogleich ohne weitere Vorbereitung zu bedürfen, durch die Diviſion erfolgt.

§. 93.

Die von Silberſchlag aufgeführte von ihm ſogenannte Anleitung zur Berichtigung der Re-

chenſätze durch die Progreſſionen, iſt eigentlich eine ſehr zuſammengezogene Progreſſionslehre; durch Ausübung der uns ſchon bekannten Progreſſions⸗Grundſätze, werden nicht erſt Begriffe der Aufgaben bloß **berichtigt**, ſondern die Aufgabe ſelbſt ſo gleich gelößt.

§. 94.

Auch die von Silberſchlag mitgetheilte **Anleitung** zur **Berichtigung** der Rechenſätze durch Geometrie und Mathematik (ein dem Nichtmathematiker wohl zu verzeihender Ausdruck) enthält eigentlich keine Vorbereitungs⸗Regeln zum Anſatze, ſondern iſt ſelbſt bloße **Anwendung** der **Arithmetik** auf Geometrie. — Da nun dieſe in den folgenden geometriſchen Theilen, durch Auflöſung geometriſcher Aufgaben, in zahlreichen Beyſpielen gelehrt werden wird; ſo würde ich eines Theils mehreres zweymal ſagen, andern Theils mehrere geometriſche Begriffe ꝛc. ſchon hier vor dem Vortrage dieſer Wiſſenſchaft ſelbſt, ausgehoben, aufſtellen müſſen, wenn ich ebenfalls in dieſer Skizze darüber etwas mittheilen wollte: ich glaube daher ſolches gegenwärtig ausſetzen zu müſſen, und verweiſe den Leſer auf jenem Zwecke angemeſſenen und überhaupt hier ſchicklicheren Ort.

§. 95.

Nützliche Abkürzung, des, zur Bestimmung des unbekannten Gliedes erforderlichen Multiplicirens und Dividirens, der im Anſatze geordneten Theile.

Daß alle Zahlen jedes Rechnungsſatzes, wenn der Anſatz richtig geſtellt iſt, Verhältnißzahlen ſind, iſt aus der Proportionslehre und dieſer Ueberſicht der Silberſchlagiſchen Rechnungsmethode, vollkommen bekannt. Daß die Diviſion der Verhältnißzahlen Abkürzungen im Rechnen ꝛc gewähre, lehrte der 34 §.; alſo können die Zahlen eines Rechnungsſatzes, durch die Diviſion, kleiner dargeſtellt, und dadurch allerdings Abkürzung des Multiplicirens und Dividirens und Zeiterſparung zur ganzen Aufläſung ſelbſt, erzielt werden.

Soll die Diviſion aber wirklich practiſchen Nutzen haben, ſo muß ſolche auf eine ſchickliche Art vorgenommen, das heißt, „bloß bey Zahlen, welche ein gemeinſchaftliches Maaß (vide pag. 10) „haben, Anwendung finden;“ es ergeben ſich ſonſt Brüche, welche das Rechnen mehr erſchweren, als dieſes Hülfsmittel ſolches abkürzt.

Je größer die Zahlen ſind, mit welchen man dividiren kann, je abkürzender wird das Verfahren.

Wie nun dividirt werden kann und muß, ohne das Verhältniß der Zahlen, in welchen alle Zahlen der einen Seite gegen *die* der andern Seite ſtehn, zu verändern, ſollen Beyſpiele deutlich lehren. In jedem Anſatze ſtehen bekanntlich mehrere Zahlen auf beyden Seiten des Strichs übereinander, und bilden gegeneinander, Factoren, einer einzigen Verhältnißzahl. So wie ich mir nemlich die Zahlen 36 und 72, in Factoren zerlegt und im Verhältniſſe gegeneinander angeſetzt, denken, und alſo anſtellen kann.

	36	: 72	
Factoren	6	2	Factoren
	3	12	
	2	3	

Oder

6	2	
3	12	Factoren
2	3	

und ohne das Verhältniß zu verändern, die gleichen Factoren beyder Zahlen gegeneinander, als 3, gegen 3. 2, gegen 2, ausſtreichen darf,

6	~~2~~
~~3~~	12
~~2~~	~~3~~

Weil die übrig bleibenden Zahlen 6 und 12, ſich eben ſo gegen einander verhalten, als 36 und 72, da der Exponent des Verhältniſſes bey beyden die Zahl 2, iſt; gerade eben auf *dieſelbe* Art und auf dieſelben Gründe geſtützt, können auch gleiche Zahlen eines Anſatzes, zu beyden Seiten des Strichs, gegeneinander ausgeſtrichen werden: dieſes Ausſtreichen iſt eigentlich ein ſtummes Dividiren beyder Seiten, durch die ausgeſtrichenen Zahlen; nur mit dem Unterſchiede, daß der Quotient 1,

nicht hingeſchrieben wird. So wie aber auch in obigem Beyſpiele, 6:12, das Verhältniß noch nicht möglichſt klein ausgedrückt iſt (vergl. mit pag. 74) ſondern auffallend beyde Glieder, noch das gemeinſchaftlich größeſte Maaß, 6 enthalten, die Diviſion alſo noch fortgeſetzt werden kann — denn

	6	12
6)	1	2

giebt das Verhältniß 1:2, welches noch immer dem, 36:72, gleich iſt, — eben ſo darf man, wenn auf beyden Seiten des Strichs eines Anſatzes, keine gleichen Zahlen (wie vorhin 2 und 3) weiter ſtehen, oder gleich anfangs keine vorhanden ſind, nicht glauben, „daß nun ſchlechterdings keine weitere Abkürzung durch die Diviſion, „welches man das Aufheben nennt, möglich ſey:““ ſondern man muß ſo lange alle Zahlen gegeneinander, (das heißt nemlich die Zahlen der einen Seite, gegen die Zahlen der andern Seite, aber ja nicht die Zahlen ein und derſelben Seite untereinander) aufmerkſam betrachten, bis man überzeugt iſt, daß auch nicht zwey derſelben eine gemeinſchaftliche Theilzahl haben.

Wir wollen eine Abkürzungsprobe an dem Schema pag. 132, ablegen.

Schema.

	16	~~360~~ (6)
	~~6~~	~~5~~
(4)	~~12~~	~~3~~
(100)	~~2000~~	7
	~~6~~	~~14~~ (7)
	~~5~~	

abgekürzt

16	*
4	7
100	7
6400	49

Erläuterung des Aufhebens.

Zuerſt kann man 2 Nullen gegeneinander ausſtreichen, als die letzte von 200∅ und die von 36∅; es iſt ſo viel, als ob man mit 10 zu beyden Seiten dividirt hätte. Nachher die eine Zahl 6, und 36 auf der andern Seite; zur Rechten, den Quotient von der Diviſion 6 in 36, nemlich 6, in eine Parentheſe (6). Dadurch ſtehen zu beyden Seiten wieder 6 (6), welche gegeneinander ausgeſtrichen werden. Ferner 5 gegen 5. Dann ſieht man, daß 3 und 12, das gemeinſchaftlich größeſte Maaß 3, haben; alſo die 3, Rechts, ausgeſtrichen, und neben die 12 den Quotient 4 geſchrieben. Um die Multiplication möglichſt zu verkürzen, ſo hebe man nun die Zahl 200; und 14, mit dem, beyden gemeinſchaftlichen Maaß, 2, und ſetze die Quotienten zur Seite. Jetzt wird man keine Zahl finden, welche mit einer andern noch eine gemeinſchaftliche Theilzahl hätte; und es iſt daher nichts weiter aufzuheben. Die noch auf jeder Seite ſtehenden Zahlen, werden, wie ſonſt in einander multiplicirt, und das Product des Sterns, in das ohne Stern, dividirt. Der Quotient iſt die geſuchte Größe, nemlich $139\frac{39}{49}$ Arbeiter.

Hätte man nicht aufgehoben, ſo würde das Product beyder Seiten, Statt der gegenwärtigen

geringen Zahlen,	6400	49 *
vielmehr	69120000	529200 *
alſo um	69113600	529151, größer geweſen

ſeyn.

§. 96.

Dieſe gezeigte Abkürzungsmethode reichte bey den häufigſten Anſätzen der Aufgaben vollkommen zu; da aber doch zuweilen auch Fälle vorkommen, wo ſehr große Zahlen, von 4—5—6... Decimalſtellen, Glieder ſind; und das Aufheben bloß durch einfache Zahlen, wenige Abkürzung gewährt, oft gar nicht möglich iſt; ſo will ich darüber ebenfalls noch einiges mittheilen.

Regeln.

a) Man ſubtrahire die größeſte Zahl der Fragſeite, von derjenigen Zahl der andern Seite, welche dieſer an Größe am nächſten kömmt, und alſo den kleinſten Reſt übrig läßt. Der Reſt, wird in eine ſolche Parentheſe [ ] zur Seite geſchrieben, und die Zahl von welcher ſubtrahirt wurde, (aber nicht auch die Zahl der Fragſeite) durchgeſtrichen.

b) Uebrigens kann man ferner noch ſo lange aufheben, als es die Zahlen erlauben, multiplicirt dann die Zahlen beyder Seiten wie ſonſt und dividirt durch das Product mit dem *, allein

„zu dem Quotienten addirt man das Glied,
„oder alle die Glieder der Seite ohne Stern

„hinzu, welche keinen Abzug gelitten haben „— ſie zeichnen ſich gleich dadurch aus, daß „ſie keine eckichte Parentheſe einſchließt.“ Die große Zahl der Fragſeite bleibt demohngeachtet ſtehen, ob ſolche gleich von der Zahl der andern Seite, ſubtrahirt iſt.

Beyſpiel. 68936 Spannen Holz koſten 864000 Pfennige, wie viel koſten 68939 Spannen?

Aufloſung.

Der Anſatz iſt,	
68936	68939
*	864000

Man muß hier die Zahl 68936, von 68939 ſubtrahiren, weil beyde einander faſt ganz aufheben, alſo durch den kleinern Reſt, die Multiplication abkürzen; der Anſatz wird dann ferner wie gewöhnlich behandelt.

68936	~~68939~~ [3]
*	864000
68936	2592000

Alſo 2592000 dividirt durch 68936, giebt den Quotient $37\frac{41368}{68936}$; dazu die im Abzug frey gebliebene Zahl 864000, addirt; giebt

$864037\frac{41368}{68936}$ Pfennige.

Verfahren bey beſondern Fällen.

Zuweilen würde die Subtraction wenigen Nutzen gewähren, wenn man nicht einige Kunſtgriffe zugleich mit anwendete; daher merke man ſich gewiſſe eigene Fälle und deren Behandlung.

Erſter Fall.

Wäre die Zahl der Fragſeite, zu klein, um eine Zahl der andern Seite beträchtlich, zu einem kleinen Reſte, mindern zu können, und es ſtehen noch außerdem auf der * Seite einzelne andere Zahlen; ſo kann man eine, oder einige davon wählen, welche mit jener zu geringen Zahl multiplicirt, ein Product geben, welches der größern Zahl der andern Seite am nächſten kömmt.

Beyſpiel. 20 Arbeiter machen in 16 Monathen einen Graben von 260 Ruthen, wie viel Arbeiter werden erfordert, um einen Graben von 1600 Ruthen in 6 Monathen zu fertigen?

20	*
16	6
[40] ~~1600~~	260

Facit $44\frac{8}{15}$.

Hier multiplicire man 260 mit 6, und ſubtrahire dieſes Product von 1600; die übrige Behandlung bleibt dieſelbe.

Zweyter Fall.

Iſt die Zahl der Seite des * zu groß, daß ſolche von keiner Zahl der andern Seite ſubtrahirt werden kann; ſo kann man dieſe größeſte Zahl des Sterns, durch irgend eine Zahl dividiren, welche nach Gutdünken einen ſolchen Quotienten ergiebt, welcher der Zahl der andern Seite am nächſten kömmt. Dann, aber müſſen auch die Glieder der Seite ohne Stern, von denen nichts abgezogen worden iſt, mit demſelben Diviſor dividirt werden; der dadurch entſtehende Quotient, wird dann ſtatt ihrer, zum Quotienten des Facit, addirt.

Beyſpiel. 8848 Pfund koſten 360 Rthlr., wie viel 2266 ℔?

8848	2266 [66]	mit 4 dividirt, giebt einen angemeſſenen Quotienten.
4) 2212	360	
*	4) 90	

Facit $2\frac{1516}{2212} + 90 = 92\frac{1516}{2212}$.

Dritter Fall.

Iſt die größte Zahl der Fragſeite aber zu klein und nicht mehr als eine Zahl noch außerdem neben ihr vorhanden, ſo multiplicire man dieſe größere Zahl mit einer beliebigen Zahl, welche nach Gutdünken die ſchicklichſte Productenzahl zum ſubtrahiren giebt; zugleich aber mit derſelben multiplicirenden Zahl auch die andern Glieder der Seiten ohne den Stern, von welchen nicht ſubtrahirt wurde; das Product dieſer letztern Glieder wird dann zum Quotienten des Facit addirt. —

Beyſpiel. 345 ℔ koſten 60 Rthlr., wie viel 2089 ℔?

345 ℔	2089 ℔	mit 6 multiplicirt, entſteht die ſchicklichſte Zahl.
2070	[19]	
*	60 Th.	
	360	

Facit, $3\frac{630}{2070} + 360 = 363\frac{630}{2070}$.

Theoretiſcher Theil.

II. Abſchnitt.

Das Unentbehrlichſte aus der theoretiſchen Geometrie für die Meßkunſt.

1. Allgemeine Begriffe und Erklärungen.

§. 97.

In ſo fern man den Raum, bloß in ſeiner Ausdehnung, ohne auf die ihn ausfüllende Materie zugleich mit zu ſehen, betrachtet, iſt ſolcher der Gegenſtand der Geometrie. Es wird derſelbe, durch die Verbindung der Begriffe von Ausdehnung, „nach Länge, Breite und Dicke oder Höhe" — welche ſeine Abmeſſungen (Dimenſionen) heißen — gedenkbar; und durch die Vorſtellung einer, nach dieſen dreyen Dimenſionen in Gränzen geſchloſſenen Ausdehnung, bildet ſich das, was wir einen „geometriſchen Körper" nennen.

Zuſatz.

Ein geometriſcher Körper hat alſo, Länge, Breite und Dicke oder Höhe.

§. 98.

Die Ausdehnung der Körper in ihren äußerſten Theilen, nennt man ihre Fläche; (Oberfläche) — Die Ausdehnung der Fläche an ihrer Gränze, heißt eine Linie, und die Gränzen der Linien, heißen Punkte.

Zuſatz.

Körper, haben alſo Flächen; Flächen haben Linien; und Linien haben Puncte, zu Gränzen. Man kann ſich ferner den Punkt, als den Anfang jeder Größe, denken; er ſelbſt, kann keine Größe haben, ſonſt könnte ſolcher die Linie nicht begränzen. Die Linie, wird durch die Vorſtellung einer Ausdehnung zwiſchen zweyen Puncten, die Fläche, durch die Vorſtellung der Ausdehnung nach Länge und Breite, und der Körper, durch die Vorſtellung der Ausdehnung nach Länge, Breite und Dicke, deutlich klar ge- denkbar.

§. 99.

Aus dem bekannten Begriffe von continuirlichen Größen und den beyden vorhergehenden Paragraphen, ergiebt ſich; „daß Linie, Fläche und

„Körper, continuirliche Größen, zuſammenhängen„de Größen ſind: folglich kann man keine Linie aus „Punkten, keine Fläche aus Linien, keinen Kör„per aus Flächen zuſammenſetzen;“ ſondern Körper aus Körpern, Fläche aus Flächen, Linien aus Linien; und eben deshalb entſteht durch die Bewegung des Punkts, eine Linie; durch die Bewegung einer Linie die Fläche; durch die Bewegung der Fläche ein Körper.

§. 100.

Diejenigen Punkte, Linien u. ſ. w., welche wir ſichtbar darſtellen, ſind von obigen, welche bloß in der Vorſtellung beſtehn, wohl zu unterſcheiden; wir müſſen ſolche zur Erleichterung des Nachdenkens und Erforſchens geometriſcher Wahrheiten, haben und anwenden: ſie heißen zum Unterſchiede, phyſicaliſche oder natürliche Punkte, Linien, Flächen und Körper. Der phyſicaliſche Punkt, die phyſicaliſche Linie ꝛc. bezeichnen bloß als Bilder die Stellen, wo wir uns den geometriſchen Punkt, die geometriſche Linie ꝛc. denken ſollen.

Zuſatz.

Alle Zeichnungen ſind deshalb bloß Bilder geometriſcher Gegenſtände; und je kleiner alſo die Punkte, je feiner die Linien entworfen werden, um ſo viel näher, genauer, ſtellen ſolche die

geometriſchen durch ſie bezeichneten, dar: vollkommen geometriſch genau, kann daher niemals eine Zeichnung werden; allein möglichſte Schärfe der Linien und deren Zuſammenſtellung mit aller nach den Fähigkeiten unſers Geſichts ꝛc. nur möglichen Richtigkeit, kann den Grad der Genauigkeit geometriſcher Arbeiten, außerordentlich, ja faſt unglaublich weit, führen, ja für den größeſten Theil vorkommender Fälle, brauchen wir nicht einmal die möglichſte, ſondern nur eine mittelmäßige Genauigkeit, zu ſuchen. — Daß derjenige, welcher ſich einmal eine vorzüglichere Accurateſſe und Sorgſamkeit zu eigen gemacht hat, und eher zu genau, als nicht zureichend genau, zu arbeiten gewohnt iſt, auch vorzüglichere, ſchätzbarere, mehreres Zutrauen im Ganzen überhaupt verdienende Arbeiten, liefern werde, als der Hansgleichgültige; (man verzeihe mir den Ausdruck) wird der ſich ſelbſt unterrichtende Leſer leicht folgern, und ſich daher ohne Zweifel in die Claſſe der erſtern, herein zu arbeiten bemühn. —

§. 101.

Aus der dem erſten Abſchnitte voranſtehenden Einleitung iſt es bekannt daß man die Geometrie, nachdem ſich ſolche mit Linien, Flächen, oder Körpern beſchäftigt, in die Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie, eintheilt. Die beyden erſtern Theile, die Longimetrie und Plani-

metrie, gehn uns hier, nach dem Hauptzwecke dieſes Buchs, eigentlich nur allein an, und können beyde ſehr gut zuſammen vorgetragen werden, doch glaubte ich die Stereometrie, aus dem Grunde nicht ganz übergehen zu dürfen, da die Ausübung einiger Grundſätze derſelben, und die Lehre ihrer Anwendung auf leichte am häufigſten im Leben vorkommende cubiſche Rechnungsfälle, nur wenige Blätter einnehmen konnte; und ich vorausſetzen durfte, daß ſolcher beyläufiger kurzer Unterricht, jedem Leſer, welchem dieſe Schrift gewidmet iſt, willkommen ſeyn werde.

Longimetrie und Planimetrie.

2. Erklärungen von Linien, Flächen, Winkeln und Figuren.

§. 102.

A. Von Linien und Flächen.

Eine gerade Linie heißt diejenige, welche die kürzeſte Ausdehnung zwiſchen zweyen Puncten darſtellt.

Eine krumme Linie hingegen, weicht von dieſer Ausdehnung bald auf der einen bald auf der andern, bald wechſelsweiſe auf beyden Seiten, ab;

und beſchreibt alſo einen längern Weg zwiſchen denſelben angenommenen Puncten, als jene. — In der graden Linie liegen alle Theile, welche ſie bezeichnen (man denke ſich eine punctirte gerade Linie) in einerley Richtung; in der krummen, können keine Theile, ſelbſt wenn das Auge die Abweichung nicht mehr bemerkt, einerley Richtung haben. —

Eben, heißt diejenige Fläche, welche durchgängig keine, auch noch ſo unbedeutende Erhöhung oder Vertiefung innerhalb ihrer Gränzen hat; alſo eine jede in derſelben gezogene Linie, ganz in die Fläche fällt. — Krumm, heißt eine Fläche, in welcher kein Theil eben iſt. — Kugelflächen und ähnliche Körper haben, weil ſie ganz in ſich ſelbſt herum laufen, keine Gränzen. — Gemiſchte Linien und gemiſchte Flächen, entſtehen und erklären ſich, aus der Zuſammenſetzung von geraden und krummen Linien und ebenen und krummen Flächen.

Parallel Linien ſind Linien, welche gegeneinander allenthalben auch bis ins Unendliche verlängert, einen gleichen Abſtand von einander haben, alſo niemals zuſammen treffen können, ſ. Tab. 1. Fig. 1. 2. — Das gerade und krumm gezogene Wagengleis, giebt die deutlichſte Vorſtellung.

Perpendicular, lothrecht, ſenkrecht, vertical, nennt man die Linie, welche nach der Richtung eines frey und ruhig hängenden mit ei

nem Gewichte verſehenen Fadens, gezogen wird; diejenige Linie, gegen welche ſie ſich ſo wenig auf die eine als die andere Seite neigt, und dieſe ihre Lothrechte oder verticale Lage hat, heißt eine Horizontal-Linie auch wohl wagrechte, waſſerrechte Linie. — Die Fläche eines ſtillſtehenden vollkommen ruhigen Teiches, giebt das beſte Bild für eine horizontale Ebene, und der Zug einer Linie zwiſchen zwey Puncten in der Ebene der Waſſerfläche, einen anſchaulichen Begriff dieſer Horizontal-Linie.

Schräg heißt jede Linie, welche ſich gegen eine Horizontal-Linie auf eine Seite neigt. — Tab. I. Fig. 3, enthält dieſe 3 Linien.

Tangente, nennt man die Linie, welche eine andere — grade oder krumme — nur in einem Puncte berührt.

Secante, welche eine andere Linie durchſchneidet.

Die Schlangen-, Schnecken-, Ey-, Oval- oder Linſen-Linie, haben jede wegen ihrer Aehnlichkeit der Form mit gewiſſen Naturgegenſtänden, als der Schlange, Schnecke ꝛc. ihren Namen erhalten.

Diagonal-Linie heißt jede innerhalb einer Fläche gezogene Linie.

Baſis oder Grundlinie, kann jede horizontale Linie heißen und werden, wenn andere Linien ꝛc. über ſolcher befindlich ſind.

Diejenige Linie, welche entſteht, wenn eine grade Linie ſich ſo lange in derſelben Ebene um einen feſten Punct bewegt, bis ſie wieder in dieſelbe Lage kömmt, heißt die Kreislinie, vide Fig. 4. Man nennt ſie auch die Peripherie, den Umkreis. Man nennt den Punct c, den Mittelpunct, das Centrum; die Linie c. a., welche den Kreis beſchreibt, heißt der Radius, der Halbmeſſer. Die Ebene, welche durch die Kreislinie begränzt wird, heißt die Kreisfläche.

Sehne oder Chorde heißt die Linie, welche ein Stück von der Kreisfläche abſchneidet als Tab. I. Fig. 5, d. e. und b. g.; das abgeſchnittene Stück heißt ein Zirkelſtück, Segment; vide x und y. — Sector, Kreisausſchnitt, heißt das Stück, welches durch 2 Radien eines Kreiſes, aus der Kreisfläche ausgeſchnitten wird; als das Stück a c g.

Durchmeſſer, Diameter, heißt die Linie, welche mitten durch die Kreisfläche geht, und ſolche in 2 gleiche Theile theilt, — ſie iſt die längſte gerade Linie im Kreiſe, und geht ſtets durch den Mittelpunct.

§. 103.

B. Von Winkeln und Figuren.

Wenn zwey Linien ſich in einem Puncte vereinigen, ohne dadurch eine einzige grade Linie

zu bilden, ſo entſteht ein ſogenannter Winkel. Der Vereinigungspunct heißt der Scheitel, oder die Spitze; und die Linien, welche den Winkel einſchließen, die Schenkel; (crura) auch concruirende Linien. Man bezeichnet einen Winkel entweder durch beſondere, in die Oefnung deſſelben geſetzte Signaturen; oder dadurch, daß die Endpuncte der beyden Schenkel mit ihm zugleich durch Buchſtaben, auf die Art benannt werden, „daß der Buchſtabe des Winkels, ſtets in der Mitte ſteht — vide Fig. 3. — Die Linien oder Schenkel, a c und c e, bilden durch ihre Vereinigung in dem Puncte c den Winkel x, oder, (was deſſelbe ausdrückt) den Winkel a c e. Ferner, die Schenkel e c und d c, den Winkel y, oder Winkel e c d; ferner d c und b c, den Winkel z oder b c d.

Da die Schenkel der Winkel, grade-, krumme- und vermiſchte Linien ſeyn können, ſo werden auch die Winkel, nachdem ſolche durch dieſe Linien gebildet werden, „in geradlinichte, krummlinichte und vermiſchtlinichte, eingetheilt.“ Wir haben uns hier, blos mit den geradlinichten zu beſchäftigen. — Um die Worte zu erſparen, ſo bezeichnet man jeden Winkel durch die Figur eines Winkels; nemlich $<$.

§. 104.

Nebenwinkel nennt man diejenigen, welche

über einer graden Linie, neben einander liegen, und einen gemeinſchaftlichen Schenkel haben, deren beyde andere Schenkel, aber zugleich eine grade Linie machen. Fig. 3, ſind < ace und ecb Nebenwinkel; desgleichen < acd und dcb; aber nicht auch < ecd und < dcb, oder < dce und < eca.

Verticalwinkel oder *Scheitelwinkel* bilden ſich, wenn zwey gerade Linien ſich ſchneiden, oder rückwärts die Schenkel der Nebenwinkel verlängert werden. Fig. 3, ſind < x und < α, oder < ace und bcf, Scheitelwinkel; desgleichen < y und < β; < z und < γ.

§. 105.

Ein *rechter* Winkel heißt derjenige, welchen eine ſenkrechte und eine horizontale Linie mit einander bilden. Fig. 3, iſt alſo der < x oder ace, welchen ac und ce zeigen, ferner < ecb durch ec und cb, ein *rechter* Winkel. — Man bezeichnet dieſen Winkel durch ein vorgeſetztes R. —

Stumpf wird der Winkel genannt, wenn ſolcher *größer*, als ein *rechter*, *Spitz* heißt der Winkel aber, wenn er *kleiner*, als ein *rechter* iſt. Fig. 3, iſt < acd ein *ſtumpfer*, und < dcb ein *ſpitzer* Winkel.

Wechſelwinkel, heißen diejenigen, welche auf entgegengeſetzten Seiten einer geraden Linie,

welche 2 andere grade Linien durchſchneidet, liegen; wie in Fig. 1; daſelbſt ſind x und y gegeneinander Wechſelswinkel und v und z.

Zuſatz.

Unverkennbar ſind alſo 2 gleiche Nebenwinkel, auch 2 rechte Winkel; 2 ungleiche Nebenwinkel enthalten aber einen ſtumpfen und einen ſpitzen Winkel; und kann man die beyden letztern wegen der ſchiefen Lage ihrer Schenkel gegen einander, ſchiefe Winkel (zum Unterſchiede von dem rechten Winkel) nennen.

§. 106.

Figur, heißt jede allenthalben mit Linien begränzte Fläche. Nach der Natur der begränzenden Linie giebt es geradlinichte, krummlinichte und gemiſchtlinichte Figuren. Man nennt die ganze Gränze einer Figur, „ihren Umfang, oder Perimeter (Umriß),“ — die Linien, welche den Umfang bezeichnen (wenn nemlich mehr als eine Linie die Figur begränzen) heißen Seiten.

Zuſatz.

Weniger als drey grade Linien, können keine Figur bilden; wohl aber kann eine einzige krumme Linie, eine Fläche allenthalben umſchließen, alſo auch eine Figur darſtellen.

§. 107.

a. Geradlinichte Figuren.

Auch dieſe erhalten wieder beſondere Abthei⸗lungen; und zwar nach der mindern oder größern Anzahl ihrer Seiten — es giebt daher

α. Dreyecke.

β. Vierecke.

γ. Vielecke (Polygone).

Jede Figur, welche mehr als 4 Seiten hat, wird ein Polygon genannt. Figuren, welche glei⸗che Seiten und gleiche Winkel haben, heißen regulaire, die ungleiche Seiten und Winkel haben, aber irregulaire.

§. 108.

Dreyecke.

Werden wieder nach der Beſchaffenheit ihrer Seiten und Winkel eingetheilt. In Rückſicht der Seiten theilt man ſolche

in gleichſeitige, gleichſchenklichte, und ungleichſeitige, ein.

Nach den Winkeln aber,

in rechtwinklichte, ſpitzwinklichte und ſtumpfwinklichte.

Zuſatz.

Die Benennung iſt zugleich für jedes Dreyeck eine faſt vollkommene Beſchreibung. Denn jedes gleichſeitige Dreyeck muß 3 gleiche Seiten haben; jedes gleichſchenklichte aber 2 gleiche Seiten; die ungleichſeitigen aber auch nicht einmal 2 gleiche Seiten. Die Rechtwinklichten haben einen rechten, und 2 ſpitze, die Spitzwinklichten, haben 3 ſpitze, und die Stumpfwinklichten, einen ſtumpfen und 2 ſpitze Winkel. Im rechtwinklichten Dreyecke heißen die beyden, den rechten Winkel bildende Seiten, „die Catheten,“ und die dritte dem rechten Winkel gegenüberſtehende Seite, „die Hypotenuſe.“

Die Dreyecke werden wie die Winkel bezeichnet; nur ſetzt man zum Unterſchiede die Figur eines Dreyecks △ hinzu.

§. 109.

Vierecke.

So wie jedes Dreieck 3 Seiten und 3 Winkel hat, ſo hat jedes Viereck auch 4 Seiten und 4 Winkel, und überhaupt jede Figur, „ſo viele Seiten, als Winkel.“

Man kann 3 Hauptarten viereckigter Figuren annehmen; nemlich ſolche, in welchen alle gegenüberſtehende Seiten, oder nur 2 Seiten, oder gar keine Seite mit einander parallel laufen. Die erſtern heißen Parallelogramme; hat ein Pa

rallelogramm rechte Winkel, ſo heißt ſolches ein rechtwinklichtes, zum Unterſchiede von dem ſchiefwinklichten, welches ſchiefe Winkel hat. Vide Fig. 7 und 8. Sind die 4 Seiten einer rechtwinklichten viereckichten Figur alle einander gleich; ſo nennt man ſolche ein Quadrat, vide Fig. 9: hingegen eine viereckichte Figur, welche bey 4 gleichen Seiten ſchiefe Winkel hat, einen Rhombus, Raute. Fig. 10. Trapezium, heißt ein Viereck, welches bloß 2 parallel laufende Seiten, aber keine gleiche Seite hat. Fig. 11. Trapezoides, wird die Figur genannt, welche gar keine parallelen Seiten hat. Fig. 12. — Gewöhnlich bezeichnet man die beyden letztern, durch den einzigen Ausdruck, „Trapezium."

§. 110.

Vielecke.

Schon nach §. 107, theilen ſich ſolche in regulaire, welche gleiche Seiten und Winkel haben vide Fig. 6., und in irregulaire, welche keine gleiche Seiten und Winkel haben.

§. 111.

b. Krummlinichte Figuren.

Von dieſen ſind hier nur „die Cylinie, das

Oval oder die Linſenlinie, und beſonders die, durch die Kreislinie gebildete Figur, der ſogenannte Kreis, zu bemerken. Fig. 6. ſind in ſolchem noch 3 Winkel verzeichnet, welche ſich in demſelben bilden; ſie heißen, < a c b, der Centerwinkel oder Mittelpuncts-Winkel; < a e b, der Peripherie-Winkel; < a b d, der Polygon-Winkel.“

§. 112.

c. Vermiſchtlinichte Figuren.

Hierher gehören unter denen, welche einen beſondern Namen erhalten haben, „die ſchon unter den Flächen, als Flächen-Ausſchnitte und Abſchnitte angeführt, Sector und Segment; wenn ſolche als einzelne Stücke betrachtet werden.“

3. Folgerungen aus nähern Betrachtungen der Lage der geraden Linien gegeneinander, und der ebenen Figuren.

A. Lehrſätze von Linien.

§. 113.

a. Alle Perpendicularen, welche zwiſchen Parallelen gezogen werden, ſind einander gleich.

Beweis.

Da nach der gegebenen Erklärung von den Pa-

rallellinien, ſolche aller Orten gleichweit von einander abſtehn; die Perpendicularen aber alle ſenkrecht, folglich auch alle in ein und derſelben Richtung gegen dieſelben ſtehn: ſo müſſen auch alle Perpendikel gleich lang, das heißt, einander gleich ſeyn. Folglich iſt in Fig. I. ab=cd.

Anmerkung.

Es war dieſes ſelbſt als Bedingung in jener Erklärung ausgedrückt, da es hieß, „2 Linien „wären parallel, wenn ſolche aller Orten „einen gleichen Abſtand hätten.“

§. 114.

b. Durch eine Diagonallinie wird jedes Parallelogramm in 2 gleiche Theile getheilt; das heißt in Fig. 7 wäre durch die Diagonale ac, das Stück abc=acd, abgeſchnitten.

Beweis.

Da in jedem Parallelogramme, die gegenüberſtehenden Seiten gleich groß ſind: ſo iſt auch hier ad=bc, und cd=ba; ferner, da der Winkel abc=<acd, weil ab und dc als Parallelen, einerley Richtung haben müſſen; ſo kann man auch dieſe Winkel dergeſtalt aufeinander legen, daß ſie ſich decken, und der Schenkel dc auf den Schenkel ba, der Schenkel bc auf den Schenkel da gelegt, werden ſich ebenfalls, folglich alle Theile

beyder Stücke ſich decken. Stücke, die ſich decken, ſind aber gleich groß: alſo theilte die Diagonal ac das Parallelogramm abcd, in 2 gleiche Theile.

Zuſatz.

Erwägt man die Gründe, aus welchen das △abc = △cdb; und in welcher Lage der Seiten, dieſe Dreyecke das Parallelogramm darſtellten; ſo ergiebt ſich, „daß ein Dreyeck, welches mit „einem Parallelogramme gleiche Grundlinie und „Höhe hat, die Hälfte eines ſolchen Parallelo„gramms ſey."

Anmerkung.

In jedem Dreyecke heißt die eine Linie, auf welche aus der Spitze des über ihr befindlichen Winkels, ein Perpendikel gefällt wird, „die Grundlinie", der gefällte Perpendikel aber, „die Höhe des Dreyecks."

B. Lehrſätze von Winkeln.

§. 114.

a. Alle rechte Winkel ſind gleich.

Beweis.

Man denke ſich Fig. 3, ec ſenkrecht auf ab, ſo entſtehn 2 R; wäre ace nicht = bce, ſo müßte ec ſich mehr nach ac oder nach cb neigen; dieſes

iſt aber nicht möglich, weil ace und bce, ſonſt keine rechten Winkel wären. Alſo Race=Rbce.

§. 115.

b. Die Summe zweyer Nebenwinkel, iſt jederzeit gleich zweyen rechten Winkeln;

Oder, es iſt, Fig. 3, < acd + < bcd = 2R.

Anleitung zum Beweiſe.

Da in jedem zu beweiſenden Lehrſatze und Aufgabe, gewiſſe anerkannte Wahrheiten liegen müſſen, aus welchen die Wahrheit des zu beweiſenden, hergeleitet werden kann; ſo muß man vor der Bemühung, einen Beweis zu führen oder auch nur den geführten Beweis vollkommen zu verſtehn, auf ſolche Wahrheiten, welche Data heißen, beſondere Rückſicht nehmen und ſolche durchdenken. —

Dieſe Data, müſſen durch ein ſorgfältiges Forſchen aus dem Inhalte des zu beweiſenden Satzes, aufgeſucht werden; — ſie können in gewiſſen Worten liegen, deren bloße Erklärung ſchon zureicht; oder es iſt über den Satz ſchon etwas bekannt, das zum Beweiſe dient; oder die Figur des Satzes, läßt ſich (da in der Geometrie durch Linien alles anſchaulich demonſtrirt werden kann) in eine andere Figur umändern, von welcher ſchon erwieſene

Wahrheiten bekannt ſind, aus denen die Wahrheit des zu Beweiſenden herzuleiten, möglich wird.

Machen wir nun von dieſem Geſagten auf den Beweis des obigen Lehrſatzes eine Anwendung; ſo wird uns das Nachdenken auf den Gedanken hinführen:

„daß der eine gegebene < acd, ein ſtumpfer, „alſo größer als ein rechter, der andere gegebene < bcd, ein ſpitzer, alſo kleiner als ein „rechter ſey.“

Wäre der erſte nun gerade um ſo viel größer, als der letzte kleiner als ein rechter Winkel, ſo müßte man den Lehrſatz „daß beyde = 2R, für richtig anerkennen.“ Man frägt ſich deshalb, „wie „iſt ſolches auszumitteln?“ Die natürlichſte Antwort wird folgende ſeyn:

„Wenn man jeden der beyden Winkel, mit einem „rechten vergleicht.“

Dieſe Vergleichung kann aber, — ſehr leicht einleuchtend — am bequemſten durch den auf c, als gemeinſchaftlichen Scheitelpunct, in Gedanken zu fällenden Perpendikel ec, geſchehn; weil dieſe ſenkrechte Linie, durch die, durch ſie erfolgte Bildung des rechten Winkels, ſogleich anſchaulich ergiebt:

„um wie viel jeder der gegebenen Winkel von einem rechten verſchieden iſt;

und aus dieſen nun möglichen Betrachtungen, fließt dann folgender

1ſter Beweis.

Es ſoll $<acd + \llcorner bcd = 2R.$

Es iſt $<ace = \llcorner bce = R.$

Nun iſt aber $<acd = R + \llcorner ecd$

und $<bcd = R - <ecd$

der $<ecd = <ecd$; alſo hebt ſich $+ecd$ u. $-ecd$ gegeneinander auf

Folglich $<acd + <bcd = R + R = 2R.$

Um den Anfänger, ein für allemal in das Feld der ſo unentbehrlichen Kenntniſſe, „Beweiſe aufzufinden“, einzuführen, will ich für obigen Lehrſatz hier noch einen 2ten Beweis herſetzen und erläutern.

Man wird nemlich, durch die Vergleichung beyder gegebenen Winkel mit einem rechten, ferner finden,

„daß die Theile des ſtumpfen Winkels, der $<$ „ace und $\llcorner$ dce mit dem gegebenen ſpitzen Winkel, innerhalb der beyden rechten Winkel liegen,

und ſchließen können,

Da $>ace + \llcorner bce = 2R$

und $\llcorner bce = bcd + dce$, das heißt, ein R iſt = den Theilen, welche einen andern R ausmachen.

* alſo $< ace + bcd + dce = 2R$. D. i., ein R und die ſämmtlichen Theile eines andern R ſind $= 2R$.

---

weil nun $< ace + dce = acd$ — d. i., die Theile des ſtumpfen $<$ ſind dem ſtumpfen $<$ ſelbſt $=$.

ſo iſt auch $< acd + < bcd = 2R$. d. i., der ſtumpfe Winkel macht in ſeinen Theilen $< ace + < dce$ mit dem ſpitzen $< bcd$ nach *, 2 R: alſo muß auch er der ſie umfaßt, an ihre Stelle geſetzt mit demſelben ſpitzen Winkel $= 2R$ ſeyn.

Gewöhnlich fallen Anfänger in den voreiligen Fehler, „die Auffindung und Führung geometriſcher „Beweiſe, wenigſtens bey ſo gleich anſchaulich rich„tigen Sätzen, für überflüſſig ꝛc. zu erklären.“

Für dieſe die Verſicherung, daß ſie in der Folge den außerordentlichen Nutzen und die Nothwendigkeit der genannten Beweiſe, vollkommen fühlen und einſehen werden; und ſich überzeugen, daß bloß durch

das Studium und die vollkommene Faſſung „leichte„rer Beweiſe, der Weg zur Auffindung und Führung, „ja ſelbſt zum bloßen Verſtehen, der geführten „ſchweren Beweiſe, geebnet werden könne; und daß „derjenige, welcher nicht einmal die wenigen hier „mitgetheilten geometriſchen Principen gründlich inne „hat, auch in der practiſchen Geometrie, alle Augenblicke Anſtoß findet und ſich nicht helfen könne."

1. Anmerkung.

Zur leichtern Ueberſicht und Bildung eines Beweiſes, iſt eine gewiſſe Ordnung, in Stellung der Beweisglieder, ſehr erforderlich; die Stellung kann folgende ſeyn:

Zuerſt, der zu beweiſende Satz — durch Theſ. welches Theſis bedeutet, bezeichnet — dann darunter, die Data durch Dat. — und unter dieſe einen Strich. Hierauf folgt der allgemeine als wahr anerkannte Satz; und unter dieſen ein Satz, welcher die Verbindung mit ſolchen knüpft. Darunter wird nun die aus jener Verbindung zu ziehende Schlußfolge geſetzt, und mit einem Striche unterzogen. Nun folgt ein Satz, deſſen Gründung in jener Schlußfolge liegt; und zuletzt das Reſultat, welches aus dieſer Gründung gefolgert werden kann.

Obige 2 Beweiſe würden hiernach alſo ſtehn:

1ſter. Beweis.

$$
\begin{array}{l}
\text{Theſ.}\ \angle acd + \angle bcd = 2R \\
\text{Dat.}\ \angle ace = \angle bce = R \\
\hline
\angle acd = R + \angle ecd \\
\angle bcd = R - \angle ecd \\
\angle ecd = \angle ecd \\
\hline
\angle acd + \angle bcd = R + R = 2R.
\end{array}
$$

2ter Beweis.

$$
\begin{array}{l}
\text{Theſ.}\ \angle acd + \angle bcd = 2R \\
\text{Dat.}\ \angle ace = \angle bce = R \\
\hline
\angle ace + \angle bce = 2R \\
\angle bce = bcd + dce \\
\angle ace + bcd + dce = 2R \\
\hline
\angle ace + dce = acd \\
\angle acd + bcd = 2R.
\end{array}
$$

2te Anmerkung.

Der Winkel, welcher einen andern zu zweyen rechte ergänzt, heißt das Supplement von dieſem Winkel, welcher ergänzt wird.

Alſo $\angle bcd$ iſt Supplement von $\angle acd$, und dieſer umgekehrt vom erſtern, — Spitze haben ſtumpfe, und ſtumpfe Winkel haben ſpitze zu Supplementen. — Gleiche Winkel haben gleiche Supplementen. Der Winkel hingegen, welcher einen andern nur zu einem rechten ergänzt, heißt deſſen Complement.

§. 116.

c. Alle um einen Punkt in einer Ebene über einer geraden Linie befindlichen Winkel, machen zuſammen nur 2 R.

Für Fig. 3. alſo, $<x+<y+<z=2R$.

Beweis.

Stände ec nicht ſenkrecht auf ac, ſo müßte man ſich auf c eine ſenkrechte gezogen denken, — hier iſt ſie ein Perpendikel — und der Beweis folgt leicht, als:

$$\frac{\text{Theſ.}\ <x+<y+<z=2R}{\begin{array}{c}<x=R\\ <y+<z=R\end{array}}$$

$$\text{alſo:}\ <x+<y+<z=2R.$$

§. 117.

d. Alle um einen gemeinſchaftlichen Punkt in einer Ebene liegende Winkel machen zuſammen nur 4 R. Alſo Fig 3

$$<x+<y+z+<\alpha+<\beta+<\gamma=4R.$$

Beweis.

Man denke ſich durch den gemeinſchaftlichen Scheitelpunct c, nur eine gerade Linie gezogen, ſo werden nach §. 115, alle über derſelben an c befindlichen Winkel $=2R$, und ebenfalls die unter derſelben an c liegende Winkel $=2R$, folglich

$$\begin{array}{l}<x+<y+<z=2R\\ <\alpha+\beta+<\gamma=2R\end{array}$$

$$\text{folgl.}\ <x+<y+<z+<\alpha+<\beta+<\gamma=4R.$$

§. 118.

e. Alle Scheitelwinkel ſind gleich groß.

Es ſey Fig. 3 $< y = < \beta$.

Beweis.

Man betrachte bey der Führung des Beweiſes, die Scheitelwinkel als Nebenwinkel, und ſchließe

Theſ. $< y = < \beta$

$< dcf + < y = 2R$ weil ſolch. üb e f als N. W. lieg.

$< dcf + < \beta = 2R$, weil ſolch. üb. d g Neb. W ſind.

Folglich $< y = < \beta$ — Weil beyd. Supplem. deſſ. $<$ ſind.

§. 119.

f. Der durch Verlängerung der einen Seite eines Dreyecks entſtehende äußere Winkel, iſt gleich der Summe der beyden ihm gegenüberliegenden innern Winkel.

Alſo Fig 13. $< bcd = < abc + < bac$.

Beweis.

Die Winkel bcd werden auf ad bis a fortgeſchoben, ſo daß ſein Schenkel cd, auf der Linie bleibt; dann wird ea mit bc parallel ſeyn, da dieſelben wegen der fortgeſchobenen gleichen Winkel einerley Lage gegen ad haben; und man kann ſchließen,

Theſ. $< bcd = < abc + < bac$

$< bac + < bae = bcd$

$< abc = < bae$ als Wechſelwinkel zwiſchen den Parallelen bc und ea.

alſo auch $< abc + < bac = < bcd$

§. 120.

g. In jedem geradlinigten Dreyecke beträgt die Summe aller 3 Winkel 2 R.

Alſo Fig. 13, $< x + < y + < z = 2R$.

Beweis.

Man verlängere die eine Seite des Dreyecks wie ſolche nach dem vorigen §. verlängert erſchien, und ſchiebe ebenfalls wie dort, den $< bcd$ nach a hin; verlängere aber überdies noch die Linie ac nach f; ſo ergiebt ſich,

Theſ. $< x + < y + < z = 2R$

Dat. $< x + y = < bcd$

$< cae = bcd$

$< z + < bcd = 2R$

$< eaf + < cae = 2R$

alſo iſt $< eaf = < z$

weil nun $< x + < y = < bcd$

ſo iſt auch $< x + < y + < z = 2R$

C. Erklärungen und Lehrſätze von Figuren.

a. Ueber Congruenz der Dreyecke.

§. 121.

Die Congruenz zweyer Dreyecke, das heißt die Wahrheit des Merkmals, daß ſolche einander gleich und ähnlich ſind, erkennt man aus nachſtehenden erforderlichen Beſchaffenheiten, welche congruende Dreyecke haben müſſen, und dieſe Beſchaffenheiten eignen ſich ſelbſt zu Lehrſätzen, als welche ſolche in der Folge auch angeführt werden ſollen.

1ter Lehrſatz.

Zwey Dreyecke ſind congruent, wenn alle Seiten und Winkel in beyden gleich ſind; wie z. B. in den Dreyecken der Fig. 14. Man darf, um ſich zu überzeugen, nur die gleichen Seiten und Winkel auf einander legen, ſo werden Seiten mit Seiten und Winkel mit Winkel zuſammen fallen, und einander decken, — folglich ſind auch die Dreyecke gleich.

2ter Lehrſatz.

Zwey Dreyecke ſind congruent, wenn alle Seiten in beyden gleich ſind.

3ter Lehrſatz.

Zwey Dreyecke ſind congruent, wenn ein Winkel und 2 derſelben einſchließende Seiten in beyden gleich ſind.

4ter Lehrſatz.

Zwey Dreyecke ſind congruent, wenn 2 Seiten und ein Winkel, welcher nicht von dieſen Seiten eingeſchloſſen wird, ſondern der größern Seite gegenüberliegt, in beyden gleich ſind.

5ter Lehrſa.

Zwey Dreyecke ſind congruent, wenn eine Seite und 2 gleichliegende Winkel in beyden gleich ſind.

Auch von der Wahrheit dieſer letzten 4 Sätze kann man ſich leicht überzeugen, wenn man die gleichliegenden Theile in 2en Dreyecken, das heißt, Winkel und Seiten aufeinander legt, wo ſich dann ſolche decken werden.

Bey rechtwinklichten Dreyecken, wird zu ihrer Congruenz bloß ein ſpitzer, gleichliegender Winkel und eine Seite, erfordert.

Auf dieſe Lehrſätze ſtützen ſich nun die jetzt nachfolgenden und die denenſelben angeſchloſſene Aufgaben.

§. 122.

a. In jedem Dreiecke ſtehen gleichen Seiten auch gleiche Winkel entgegen; und umgekehrt:

Da Fig. 15, ac=bc, ſo ſoll x=y ſeyn ꝛc.

Anleitung zum Beweiſe.

Dieſer Beweis läßt ſich aus der Congruenz

zweyer Dreyecke führen. Das Dreyeck a b c muß in eine Figur umgeändert werden, welche 2 congruente Dreyecke bildet; ſolches geſchieht durch gleiche willkührliche Verlängerung der Schenkel nach d und e, und das Ziehen der Linien a e und b d.

In beyden Dreyecken b c d und a c e, iſt der gemeinſchaftliche Winkel c, von gleichen und hier ſelbſt gemeinſchaftlichen Seiten d c und e c, eingeſchloſſen; folglich ſind beyde congruent; und da ſolche congruent, das heißt, gleich und ähnlich ſind, ſo müſſen aber auch alle übrigen Theile derſelben nach der Ordnung, wie ſie in beyden liegen, ſich gleich ſeyn.

Nun ſind, da a e = b d, noch zwey andere congruente Dreyecke a b d und a b e, entſtanden — denn a d und b e, und a e u. b d, ſchließen die gleichfalls durch die Congruenz der erſten beyden Dreyecke, für gleich erkannten Winkel, nemlich den $<$ a d b und $<$ a e b, ein. —

Da nun in dieſen letzten zweyen congruenten Dreyecken, auch alle Winkel gleich ſeyn müſſen, alſo auch b a d = a b e; ſo müſſen auch dieſer gleichen Winkel ihre Supplemente, gleich ſeyn — vide 2te Anmerk. §. 115. — Dieſe Supplemente ſind x und y; und zwar diejenigen Winkel, deren Gleichheit bewieſen werden ſollte.

Dieſer Beweis geometriſch ausgedrückt, ſtände alſo:

Theſ. $x = y$

Dat. $ac = bc$ und

$ad = be$

$$ca + ad = cb + be$$

$$cd = ce$$

Alſo $\triangle ace \cong \triangle bcd$

Folglich in beyden Dreyecken alle Winkel und Seiten gleich.

Daraus die beyden andern congruenten Dreiecke, als

$$\triangle abd \cong \triangle abe$$

in dieſen ſind alſo wieder alle Winkel und Seiten gleich, folglich auch die Supplemente der gleichen Winkel; nemlich

von den $\angle bad = \angle abe$

die Supplemente $\left\{\begin{array}{l} x \text{ und } y \\ x = y \end{array}\right.$

Zuſatz.

Dieſer Lehrſatz umfaßt zugleich folgende Wahrheiten, welche ſich aus ihm ableiten laſſen.

a. Daß auch gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber ſtehen. — Man vergleiche in der Fig. 15. alle Winkel und Seiten, um ſich zu überzeugen:

b. daß in jedem gleichſchenklichten Dreiecke, die den gleichen Schenkeln gegenüberſtehenden Winkel (alſo die Winkel an der Grundlinie) einander gleich ſind; ferner, daß ſelbſt die, durch die Verlängerung dieſer Schenkel unterhalb der Grundlinie entſtehende Winkel, gleich ſind. — vide Fig. 15. $bad = abe$. —

§. 123.

b. In jedem Dreiecke, ſteht der grö=ßern Seite auch der größere Winke gegenüber; und umgekehrt:

In Fig. 16. iſt bc > ab, deshalb ſoll ∟ bac > y ſeyn.

Beweis.

Man denke ſich die Länge des Schenkels ba, auf bc nach d, bemerkt oder getragen; und die Linie ad, gezogen; ſo bildet ſich ein gleichſchenklichtes Dreieck bad.

Sehn wir den Schenkel bd, als die verlängerte eine Seite cd von dem kleinen △ cda, an; ſo iſt der dadurch nach §. 119. entſtehende äußere ∟ x, ſo groß, als < y + < z. Da nun < x = < bad — weil ſie gleichen Seiten gegenüber ſtehn — und ∟ bad nur erſt ein Theil von bac iſt; um ſo mehr muß ∟ bac größer ſeyn, als ∟ y.

Geometriſch ſtände der Beweis alſo:

Theſ. ∟ bac > ∟ y.
bc > ab.
Dat. ab = bd

Nach §. 119. iſt ∟ x > ∟ y
Nach §. 122. iſt ∟ x = ∟ bad
∟ bac > ∟ x

Noch vielmehr ∟ bac > < y.

Für den umgekehrten Fall, daß dem größern Winkel auch die größere Seite, gegenüber ſtehe, iſt der Beweis ſehr leicht zu führen. Denn, es ſey $< bac > y$, ſo kann auch bc nicht ſo groß als ab ſeyn; denn gleichen Seiten ſtehen gleiche $<$ gegenüber. Kleiner kann bc aber auch nicht ſeyn, denn nach §. 123. ſteht der kleinern Seite ja der kleinere $<$ gegen über und $<$ bac iſt doch der größere $<$; folglich muß ſie die größere ſeyn.

§. 124.

c. In jedem Dreyecke ſind zwey Seiten größer als die dritte.

Es wäre alſo $ac + cb > ab$.

Beweis.

Auch dieſer Beweis iſt leicht zu führen. Man verlängere ac nach d, ſo daß cd ſo groß werde als cb, und ziehe bd: ſo bildet ſich das gleichſchenklichte Dreyeck bcd, und zugleich das größere abd. Da nun nach §. 123. Lehrſatz b, dem größern Winkel, die größere Seite, und umgekehrt dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüberſteht, der $< x$, welcher im $\triangle$ abd, der Seite ab gegenüberliegt, aber kleiner als der $<$ abd; ſo iſt auch die dieſem größern Winkel abd zugehörende Seite ad größer als ab; und $ad = ac + cb$ alſo $ac + cb > ab$.

Geometr. ausgedrückt.

Theſ. $ac + cb > ab$

Dat. $cb = cd$

$\triangle bcd$

$\angle x = \angle y$

$\angle y < \llcorner abd$

$\angle x < \llcorner abd$

Nach d. Folger. da $\llcorner x < \llcorner abd$ aus §. 123 alſo auch $ab < ad = ac + cb$

§. 125.

d. Wenn aus der Mitte der Grundlinie eines gleichſchenklichten Dreyecks, in die Spitze deſſelben eine gerade Linie gezogen; ſo theilt ſolche das Dreyeck, und den Winkel deſſelben, an der Spitze, wohin ſie gezogen wurde, in 2 gleiche Theile, und ſteht auf der Grundlinie ſenkrecht.

Es ſoll Fig. 18. $\triangle acd \cong \triangle bcd$,

$\llcorner z = \llcorner z$

$\llcorner adc = \llcorner bdc = R$.

Beweis.

Durch den Beweis der Congruenz der beyden Dreyecke, $\triangle acd$ und $\triangle bcd$, würde dieſer Lehrſatz faſt in allen Stücken bewieſen ſeyn: in beyden Dreyecken würden dann nemlich alle gleichliegende Winkel und Seiten gleich ſeyn; es wäre alſo auch $\angle acd = bcd$ und $\angle adc = \angle bcd$; und bloß noch zu beweiſen,

daß c d ſenkrecht auf a b ſtehe. Dieſes ergäbe ſich aber durch die Erwägung, daß ſolches Nebenwinkel ſind. Denn da die Summe der Nebenwinkel $= \angle 2R$, hier aber beyde Nebenwinkel einander gleich wären, ſo müßte jeder derſelben ein R ſeyn: dann aber ſtände auch c d ſenkrecht auf a b. Nach §. 121. Lehrſatz Nr. 3, ſind aber auch beyde △ congruent; denn die gleichen Winkel x und y werden in beyden Dreyecken von gleichen und gleichliegenden Seiten, eingeſchloſſen. $ac = bc$, und $ad = bd$; der Lehrſatz dieſes §. wäre alſo bewieſen.

Geometriſch.
Theſ. $\triangle acd \cong \triangle bcd$
$\angle z = \angle z$
$\angle adc = \angle bdc = R$
Dat. $ac = bc$
$ad = bd$

Nach §. 122 $\angle x = \angle y$
$ac = bc$
$ad = bd$

Alſo nach §. 121 Lehrſatz Nr. 3., $\triangle acd \cong \triangle bcd$
$\angle z = \angle z$
$\angle adc = \angle bdc$

Folgerungen aus § 114. $\angle adc = \angle bdc = R$.

Den Lehrſatz, „daß eine gerade Linie, welche den „Winkel an der Spitze eines gleichſchenklichten Drey„ecks halbirt, auch das ganze Dreyeck, und deſſen „Grundlinie halbire und ſenkrecht auf ſolcher ſtehe, „wird jeder Anfänger ſehr leicht nun ſelbſt beweiſen „könnnen.“

§. 126.

Aufgaben.

1ſte Aufgabe. Aus einem auf einer geraden Linie gegebenen Puncte, auf ſolche einen Perpendikel zu errichten.

Fig. 18 auf c der Perpendikel dc.

Auflöſung.

Man faſſe das Stück ac zwiſchen den zwey Zirkelſpitzen, und trage daſſelbe von c nach e, ſo iſt ac = ce. Aus a oder e öffne man den Zirkel nach Belieben über c heraus, ſetze den einen Zirkelfuß in a und b und reiße mit der unveränderten Weite, die Bögen xy, und vz. Der Durchſchnittspunkt d, liegt ſenkrecht über c, und eine von d nach c gezogene Linie, muß alſo auf c ſenkrecht ſtehn. Der Beweis der Richtigkeit der Auflöſung iſt leicht zu führen.

Denn da mit gleicher Zirkelöffnung die Bögen gezogen wurden, ſo iſt ad = ed, und das △aed gleichſchenklicht; aus welchem Grunde dann auch nach §. 125., dc ſenkrecht auf ab ſteht.

Anmerkung.

Wie ein gleichſchenklichtes Dreieck gezeichnet werden müſſe, iſt durch die Auflöſung der vorſtehenden Aufgabe zugleich mit gezeigt. Nemlich mit gleicher Zirkelöffnung, werden aus 2 beliebigen Punkten, ſolche Kreutzbögen, wie

x y und v z, gezogen, und aus dem Durchſchnittspunkte, die Schenkel auf die Grundlinie in die Puncte, aus welchen die Bögen beſchrieben ſind, gezogen.

2te Aufgabe. Aus einem, außerhalb einer geraden Linie gegebenen Puncte, einen Perpendikel auf eine grade Linie fallen zu laſſen.

Fig. 19. ſoll aus c auf a b eine ſenkrechte Linie gefällt werden.

Auflöſung.

Man ſetze den einen Zirkelfuß in c, öffne den andern Zirkelſchenkel nach Belieben bis überhalb a b, ohngefähr bis x, und reiße mit dieſer Weite den Bogen, welcher auf a b zwey Punkte, nemlich e und f abſchneidet. Ueber die Linie e f zeichne man ein gleichſchenklichtes Dreyeck, (auf die bekannte Art durch Kreutzbögen) und ziehe von dem Durchſchnittspunkte bis c, eine gerade Linie; dieſe wird e f, also auch a b ſenkrecht in g ſchneiden, und alſo auch ſenkrecht auf a b ſtehn. Der Beweis kann aus den Lehrſätzen der Congruenz und §. 125 ſehr leicht geführt werden. Man ziehe in der Figur e c, f c, e d, f d: ſo ergiebt ſich e c = f c; und e d = f d. c d iſt = c d, alſo entſtehn 2 △, c d e und c d f, welche ≅, weil ſolche nach §. 121 Lehrſatz Nr. 2, 3 gleiche Seiten haben. In beyden ſind alſo auch alle Winkel nach der Ordnung ihrer Lage gleich; folglich ∟ y = ∟ z. Und da ferner c g = c g, und e c und g c, wie

fc und gc, die gleiche Winkel y und z einſchlie-ſen, ſo iſt nach §. 121 Lehrſatz Nr. 3, das $\triangle$ ecg $\cong$ $\triangle$ gcf; folglich auch alle Seiten, nach der Ordnung, wie ſie auf einander folgen, einander gleich; alſo auch eg = gf. Nach §. 126 ſteht aus der Mitte der Grundlinie zur Spitze eines gleichſchenklichten Dreyecks eine gerade Linie gezogen, ſolche auf der Grundlinie, alſo hier cg auf ef, und dadurch auch auf ab, ſenkrecht.

Anmerkung.

Dieſe Auflöſung enthält zugleich das ganze Verfahren, welches man bey der Theilung einer geraden Linie in zwey gleiche Theile zu beobachten hat. Man errichtet nemlich über der zu theilenden Linie ober- und unterhalb ein gleichſchenklichtes Dreyeck von beliebigen Schenkeln, und zieht durch deren Spitzen eine gerade Linie; dieſe Linie durchſchneidet jene zu theilende Linie in der Mitte.

3te Aufgabe.

Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

Fig. 20. Der $\angle$ bac ſoll in 2 Theile getheilt werden.

Auflöſung.

Aus a werden auf ab und ac die gleichen Stücke ad und ae abgeſchnitten, de gezogen,

und über dieſer Linie ein gleichſchenklichtes Dreyeck gebildet. Wenn nun aus deſſen Spitze f, zur Winkelſpitze a, eine Linie a f gezogen wird: ſo wird der Winkel b a c halbirt. Da dieſe Figur bey genauer Betrachtung ganz die vorhergehende Fig. 19 iſt; und der Beweis dort ausführlich geführt wurde: ſo kann ſolcher hier ganz kurz gefaßt, mitgetheilt werden. Das △ a d g ≌ △ a e g; alſo ∟ x = ∟ y, folglich ∟ b a c durch f, a halbirt.

4te Aufgabe.

Zu einem gegebenen Dreyecke ein gleich großes zu zeichnen.

Fig. 14 ſoll zu △ x das △ y ≌ gezeichnet werden.

Auflöſung.

Man nehme für das △ y eine Grundlinie, welche der, des △ x gleich iſt; — alſo a b = a b — faſſe die Seite a c von △ x, zwiſchen die Zirkelſchenkel, und reiße aus a des △ y, damit den Bogen o p, eben ſo mit b c des △ x, aus b des △ y den Bogen q r, und ziehe nun zum Durchſchnittspunkte a c, b c, ſo werden in beyden Dreyecken alle 3 Seiten gleich, folglich die Dreyecke ſelbſt congruent ſeyn.

Anmerkung.

Auf dieſelbe Art wird auch ein Dreyeck von 3 gegebenen Seiten — wovon aber 2 größer als die

dritte ſeyn müſſen — gezeichnet. Man faßt nemlich eine nach der andern zwiſchen die Zirkelſchenkel, und reißt damit Kreutzbögen, deren Durchſchnittspunkt, der Scheitelpunkt, für zwey, über der dritten Linie aus deren Endpuncten zu zeichnenden Schenkel des verlangten Dreyecks iſt.

5te Aufgabe.

Zu einem gegebenen Winkel einen gleich großen zu zeichnen. —

Fig. 21 zu ∟ x einen gleichgroßen.

Auflöſung.

Man ſchneide aus dem Scheitelpunkte des gegebenen Winkels auf beyden Schenkeln durch einen Bogen ein gleiches Stück ab; — alſo a d = a e — reiße aus f (dem Scheitelpunkt des zu zeichnenden Winkels) mit der Länge des, auf den Schenkeln des gegebenen Winkels abgeſchnittenen Stücks a d oder a e ebenfalls einen Bogen, — h g — faſſe dann e d zwiſchen den Zirkel, und reiße damit aus g den zweyten, h g durchkreutzenden Bogen i k, ſo ergiebt der Durchſchnittspunkt mit dem Scheitelpunkte f die Lage des zur Beſtimmung des geſuchten gleichen Winkels erforderlichen Schenkels an. Dieſen bildet nehmlich die Linie f m, durch ſolche Punkte f und h gezogen. Der Beweis kann ſehr leicht durch Zeichnung der Linien d e und h g, welche mit den übrigen 2 Paar Seiten 2 △ bilden, und zwar, da alle 3 Seiten in beyden Dreyecken gleich groß ſind, alſo 2 congruente Drey-

ecke ſeyn müſſen, möglich gemacht werden. Denn ſind, wie es erwieſen iſt, beyde Dreyecke, a d e und f h g congruent; ſo ſind in ſolchen auch alle Winkel, folglich auch $\angle$ d a e = $\angle$ h f g oder $\angle$ x = y.

6te Aufgabe.

Eine Parallele zu einer gegebenen geraden Linie durch einen außerhalb derſelben beſtimmten Punct zu ziehen.

Vorbereitung zur Auflöſung.

Aus der gegebenen Erklärung von den Parallinien, kann auch der Lehrſatz gefolgert werden, „daß zwey Linien mit einander parallel ſind, „wenn zwiſchen ſolche aller Orten gleichlange Perpendikel errichtet werden können;" und aus der Erklärung von den Wechſelswinkeln:

„daß zwey Linien ebenfalls parallel ſind, wenn „ſolche von einer dritten ſo durchſchnitten werden, daß die Wechſelswinkel zwiſchen denſelben gleich ſind." Allein es giebt noch mehrere Fälle, welche die parallele Lage zweyer Linien gegen einander erkennen laſſen, wie uns Fig. 1, — da ſolches weſentlichen practiſchen Nutzen gewährt — lehren ſoll. Nemlich auch dann, wenn $\angle$ v + $\angle$ y, oder $\angle$ x + $\angle$ z, oder $\angle$ b f e + y, oder e f d + z, = 2 R. oder $\angle$ e f d = y, oder e f b = z. Ehe wir die Beweiſe für dieſe Lehrſätze aber mittheilen, iſt es zweckmäßig, die ver-

ſchiedenen Benennungen, welche die jetzt ſo eben angeführten Winkel erhalten haben, hier ſämmtlich und in der möglichſt nächſten Verbindung mit jenen Beweiſen, kurz vor der Verzeichnung der Parallelen ſelbſt, um dabey ſich ſolche deſto leichter und lebhafter vorſtellen zu können, anzuführen; und bloß die Ueberzeugung: „durch dieſe „Zuſammenſtellung des Ganzen, dem ſich Selbſtunterrichtenden einen leichtern und alſo nützlichen Ueberblick zu verſchaffen“, konnte mich veranlaſſen, durch ſolches hier manches auſſer der Ordnung aufzuſtellen.

Alle zwiſchen den 2 durchſchnittenen Linien liegende Winkel heißen innere; — als ∠ x, v, y, z — die auſſerhalb denſelben befindlichen, heißen äuſſere; — als ∠ r, t, p, q. — Die Winkel y und v, t und q heißen auf einer Seite liegende innere und äuſſere Winkel; ∠ x und z, ∠ r und p gleichfalls. Die Winkel x und y, und z und v heißen daher innere Wechſelswinkel, r und q, ſo wie t und p ſind hingegen äuſſere Wechſelswinkel. Noch heißen r und z, p und x, t und y, q und v, entgegengeſetzte äuſſere und innere Winkel — z iſt nemlich der innere entgegengeſetzte Winkel von dem äuſſern ∠ r; ∠ p vom ∠ x ꝛc.

Beweiſe der, für das Parallelſeyn zweyer Linien, welche von einer dritten getroffen oder durchſchnit-

ten werden, vorhin angegebenen Lehrſätze.

1. Wenn zwiſchen 2 Linien aller Orten gleiche Perpendikel errichtet werden können.

— Wenn alſo zwiſchen den ſenkrecht über einander liegenden Puncten α g, f β ꝛc., und α g = f β ꝛc. gefunden werden. —

Linien ſind nicht parallel, wenn ſolche verlängert, ſich auf der einen oder andern Seite in einem Puncte endlich treffen, oder zuſammenlaufen. Dieſes geſchiehet jederzeit aber nur dann, wenn die Endpuncte zweyer gegen einander geneigter Linien zuſammen fallen, und dieſe Linien alſo daſelbſt gar keinen Abſtand von einander haben.

Im vorliegenden Falle iſts ja aber Bedingung, daß aller Orten gleiche Perpendikel, welche ſelbſt einen gleichen Abſtand fordern, ſollen zwiſchen ſolche gezogen werden können; folglich können ſie an keinem Orte zuſammen treffen, ſondern müſſen parallel ſeyn. Denn ſollten ſich Fig. 1, a c und b d nach den * zu ſchneiden, ſo müßten ſolche den, zur Bedingung gemachten gleichen Abſtand gegen einander, verlieren; — es könnte auch nicht mehr αg = fβ ſeyn.

2. Wenn die auf einer Seite der, die 2 Linien durchſchneidenden 3ten Linie liegende innere Winkel gleich 4 R.

Alſo Fig. 1 ∟ x + ∟ z, oder ∟ v + y = 2 R.

Sollten ſich die Linien nach + ſchneiden, ſo würden ſolche mit f g ein Dreyeck bilden, deſſen beyde Winkel x + z = 2 R ſeyn müſſen, (da dieſe doch 2 R ſeyn ſollen) welches aber unmöglich iſt, weil alle drey Winkel eines Dreyecks nur 2 R betragen. Sollten ſie ſich aber nach * ſchneiden, ſo träte mit den Winkeln v und y derſelbe Fall ein, und iſt ſolches daher ebenfalls unmöglich; folglich, da ſich die Linien a c, b d, ſo wenig nach + als * ſchneiden können, ſo ſind ſie parallel.

3. Wenn zwey innere Wechſelswinkel einander gleich ſind.

Alſo entweder ∟ x = ∟ y oder ∟ v = ∟ z ∟.

Für den Fall ∟ x = ∟ y —

Bekanntlich iſt ∟ x + ∟ v = 2 R. ∟ x ſoll = ∟ y, alſo auch ∟ v + ∟ y = 2 R; iſt dieſes aber, ſo können ſich die Linien, nach dem vorhergehenden Beweiſe nicht ſchneiden.

4. Wenn ein äuſſerer und ein innerer Wechſelswinkel zuſammengenommen = 2 R.

Alſo der ∟ r + ∟ y = 2 R, oder ∟ p + ∟ v = 2 R ꝛc.

Für ∟ r + ∟ y = 2 R —

Der Winkel v, als Vertikalwinkel; da r + y = 2 R, ſo iſt auch ∟ v + ∟ y = 2 R; alſo auch für dieſen Fall, da dieſe Linien a c, b d eine ſolche Lage gegen e h haben, ſind ſolche parallel und können ſich niemals ſchneiden.

5. Wenn die auf einer Seite der durchſchneidenden Linie liegende 2 äuſſere Winkel = 2 R ſind.

Alſo $\angle r + \angle p = 2R$.

Der $\angle r$ iſt als Verticalwinkel $= \angle v$, der $\angle p = \angle y$, $\angle v + \angle y$ aber $= 2R$, alſo a c, b d parallel.

6. Wenn ein äuſſerer Winkel gleich iſt dem ihm entgegengeſetzten innern.

Alſo der $\angle t = \angle y$. ꝛc.

Der Winkel $t + \angle v = 2R$ und $\angle v + \angle y = 2R$. Alſo auch dieſer Fall bewieſen.

Nach der vollkommenen Einſicht dieſer Beweiſe, wird die Richtigkeit der nachſtehenden Auflöſungsarten deſto evidenter einleuchten, und jeder Anfänger ſich die Fähigkeit erworben haben:

„bey allen vorkommenden, den beſten Geometer
„oft ſelbſt gleichſam chicanirenden Local-
„fällen, ſich helfen, und ohne Zeitverluſt
„mit Zuverläſſigkeit arbeiten zu können;“

da entgegengeſetzt, der bloß practiſch Unterrichtete, bey einem Locale, welches ſeinem mechaniſchen, bloß für gewiſſe Fälle ausgemittelten Verfahren, feſte Hinderniſſe entgegenſtellt, in die gröſseſte Verlegenheit gerathen, Zeit und Mühe verſchwenden, und demohngeachtet faſt ohne Ausnahme, fehlerhaft arbeiten muß.

Sollte daher, — ich glaube es wiederholen zu dürfen — dem angehenden Geometer, der, auch wohl von ſo genannten practiſchen Feldmeſſern ihm aufgedrungene Gedanken aufſteigen:

„dieſes oder jenes aus der wenigen äuſſerſt kurz-
„gefaßten Theorie überſchlagen zu dürfen

„weil Aufſtellung und Anwendung eines Saz-
„zes von ihm nicht ſogleich überſehen werden
„kann; ſo erinnere ſich derſelbe dieſer auf Ueber-
„zeugung gegründeten Verſicherung, daß die
„Ausübung der Geometrie, zahlreiche Um-
„ſtände, bey welchen die Kenntniß jener
„Grundſätze unentbehrlich werde, mit ſich füh-
„re, deren Aufzählung und Erläuterung ihrer
„Behandlung einzeln, detaillirt aufzuſtellen,
„die doppelte Zahl der Bogen dieſer Schrift
„aber ſowohl nicht zureichen, als wegen der
„auſſerordentlichen Verſchiedenheit der
„Fälle, überdieß ein ſo unmögliches als un-
„nützes Unternehmen ſeyn würde. Zugleich
„würden auch, (da ſich in der ganzen Geo-
„metrie Satz auf Satz ſtützt) durch das Ueber-
„ſchlagen gewiſſer Sätze, im ganzen Studium
„ſolche Lücken entſtehn, daß der Studirende
„bald hier bald dort Anſtoß finden, nicht wei-
„ter vordringen könnte, und zuletzt nach ver-
„geblich angewandter Zeit und Mühe, ſich ge-
„zwungen entſchließen müßte, das Ueber-
„ſchlagene gründlich nachzuholen. —“

Auflöſungen.

1ſte Auflöſung. — Fig. 22. — Der Punct, durch welchen die Parallele zu ab gezogen werden ſoll, ſey c, aus c laſſe man (wie in dem Vorhergehenden gelehrt worden iſt) einen Perpendikel auf ab fallen, und errichte aus irgend einem andern auf ab zu

wählenden Puncte einen gleich langen Perpendikel, — aus e den Perpendikel e f = d c, — und ziehe durch den Punct f und c eine gerade Linie; dieſe wird die verlangte Parallele zu a b ſeyn. Der über das Parallelſeyn (Parallelismus genannt) zweyer geraden Linien, geführte erſte Beweis, pag. 231 wird dieſe Auflöſung als richtig erkennen laſſen.

2te Auflöſung. Man ziehe — Fig. 23 — durch den Punct c und a h eine durchſchneidende Linie f g, welche willkührlich mit a h wie hier, oder mit b h (wie ſolches die Umſtände in der Ausübung für das Nützlichſte erkennen laſſen und erfordern) einen ſtumpfen Winkel machen kann. An den Schenkel h c wird dann aus c ein gleich großer innerer Wechſelswinkel als a h c angezeichnet — der ∟ h c d — der 2te Schenkel dieſes neuen Winkels wird dann mit a h oder a b parallel liegen und durch c nach e verlängert, die verlangte Parallele zu a b, nemlich e d geben. — Man ſuche nun ſelbſt den Beweis! — pag. 232. No. 3.

3te Auflöſung. Mit Beybehaltung der Fig. 23. — Man ziehe durch c wie vorhin, f g, und ſetze auf die rechte oder die linke Seite derſelben an c mit Beybehaltung des Schenkels h c einen entgegengeſetzten äuſſern Winkel zu dem an a b durch f g gebildeten innern (rechts oder links liegenden) Winkel, alſo zu ∟ a h c den ∟ f c e; zu ∟ b h c den ∟ d c f. Der 2te Schenkel des neuen Winkels, liegt dann parallel mit a b. pag. 233 No. 6.

Ganz auf dieſelbe Art würde man, wenn man die unterhalb ab ſich abſchneidenden Winkel zum Ziehen der Parallelen benutzen wollte, verfahren müſſen. — Zu dem äuſſern ∟ abg wird z. B. der entgegengeſetzte innere Winkel ech, an c angezeichnet; ſo liegt der Schenkel ec mit ab, parallel.

§. 127.

Aus dieſem Vorgetragenen wird man nun auch leicht das Zeichnen der Vier- und Vielecke, und andere Folgerungen abſtrahiren können.

Aufgabe.

Es ſind zwey Seiten mit dem von ihnen eingeſchloſſenen Winkel gegeben; man ſoll aus dieſen Stücken ein Parallelogramm zeichnen.

Fig. 8, ab und bd und ∟ b.

Auflöſung.

Man nehme eine von den gegebenen Linien — hier z. B ab — zur Grundlinie an, ſetze an einen ihrer Endpuncte den gegebenen Winkel mit dem gegebenen Schenkel (als der 2ten Linie) und ziehe die Endpuncte beyder Schenkel zuſammen: ſo entſteht das Dreieck abd. Ueber dieſem zeichne man das congruente Dreyeck acd, in welchem die Diagonal ad die Grundlinie wird.

Beweis.

Da beyde Dreyecke $\triangle$ abd und acd congruent ſind, ſo iſt auch $\llcorner$ bad = adc, und da ſolche Wechſelswinkel alſo ab parallel mit cd: Ferner der $\llcorner$ adb = cad, ebenfalls als Wechſelwinkel, alſo auch ac parallel mit bd und daher abcd ein Parallelogramm, aus den gegebenen Seiten und Winkel gezeichnet.

§. 128.

Lehrſatz.

In jedem Parallelogramm, ſind die nach der in ſolchem gezogenen Diagonal entgegengeſetzten Winkel einander gleich.

Fig. 8. $\llcorner$ cab = $\llcorner$ bdc.

Beweis.

Der $\llcorner$ bad und adc ſind als Wechſelswinkel gleich; ſo auch $\llcorner$ cad = $\llcorner$ adb; folglich weil $\llcorner$ bad + $\llcorner$ cad = $\llcorner$ cab, und $\llcorner$ adc + $\llcorner$ adb = $\llcorner$ bdc, der Winkel cab alſo auch gleich dem Winkel bdc. Alle 4 Winkel ſind ja wechſelſeitige Supplemente.

1. Zuſatz.

Auf dieſelbe Art ergiebt ſich auch, daß der $\llcorner$ acd = $\llcorner$ abd.

2. Zuſatz.

In jedem Parallelogramme ſind die einander gegenüberſtehenden Seiten einander gleich; denn

gleichen Winkeln ſtehen gleiche Seiten gegenüber, — vide Lehrſatz a. §. 122. — der Winkel dab iſt ſo groß als der Winkel cda; alſo die Seite welche dem erſtern gegenüberſteht, gleich der letztern, daß iſt, bd=ac. Daſſelbe gilt auch für ab=cd, welche den gleichen Winkeln adb und dac, gegenüber liegen. — Man drückt dieſes, wie ſchon einmal geſagt iſt, aus, „Parallelen zwiſchen Parallelen „ſind einander gleich.“

§. 129.

Lehrſatz.

Wenn in einem Vierecke die beyden gegenüberſtehenden Seiten einander gleich und parallel ſind, ſo iſt daſſelbe ein Parallelogramm.

Beweis.

Man zeichne ſich Fig. 8, mit der Diagonal ad, ſo ergeben ſich vier gleiche Wechſelswinkel, ∟adb und ∟cad, nach ſolchen iſt ac parallel mit bd, und ∟bad=∟adc, alſo cd parallel mit ab: das Viereck alſo ein Parallelogramm.

§. 130.

Aufgabe.

Ein rechtwinklichtes Viereck zu zeichnen.

Aufloͤſung.

Sind die Seiten dazu gegeben, ſo nehme man eine derſelben als Grundlinie an, errichte aus deren Endpuncten mit zweyen der uͤbrigen 3 Seiten, welche 2 Seiten aber blos unter ſich gleich ſind, (wenn ſonſt nicht alle 4 Seiten einander gleich), 2 Perpendikel, und lege uͤber ſolche die der Gruudlinie gleiche Linien. Man ſieht, daß allerdings dann von dieſen 4 gegebenen Seiten, ſtets 2 und 2 gleich ſeyn muͤſſen. Sind keine Seiten gegeben, ſo errichtet man uͤber einer beliebigen Grundlinie 2 gleich lange Perpendikel, und zieht deren Endpunct zuſammen.

§. 131.

Aufgabe.

Jede gegebene geradlinichte Figur, von vier und mehrern Seiten abzuzeichnen.

Aufloͤſung.

Das Verfahren liegt ebenfalls ſchon ganz in den Erlaͤuterungen, welche uͤber die Zeichnungen der Dreyecke gegeben ſind, gegruͤndet. Man zerlege nemlich jede Figur in Dreyecke, und zeichne dann ein Dreyeck nach dem andern in der Ordnung und Verbindung, in welcher ſolche liegen, ab —; mit welchem Dreiecke der Anfang gemacht wird, iſt gleichguͤltig, nur muͤſſen die Dreyecke in der Ordnung, wie ſolche

auf einander folgen, wenn ein Dreyeck einmal verzeichnet und als das erſte angenommen worden iſt, gezeichnet werden. Die Zerlegung der Figuren und Dreyecke geſchieht durchs Ziehen der Diagonalen, wie man ſolche ziehen will, iſt ebenfalls willkührlich.

Vierecke,

werden durch eine Diagonal in 2 Dreyecke zerlegt, und würde daher zu dem Dreyecke e f h Fig. 24, welches dem, durch die in dem abzuzeichnenden Vierecke a b c d gezogene Diagonal a d entſtandenen Dreyecke a b d gleich gezeichnet iſt, das 2te Dreyeck e g h = dem, zur Ergänzung des Vierecks gegebenen 2ten △ a c d, noch hinzugezeichnet werden müſſen. Man ſetze daher an die Diagonal e h den ∟ x oder ∟ y des Dreyecks a c d, und zeichne, wie ſchon bekannt iſt, überhaupt über e h das △ e g h = △ a c d, ſo iſt das Viereck e f g h = a b c d. Daß

Vielecke.

auf dieſelbe Art abgezeichnet werden können, ſoll die Zeichnung der 26ſten Fig. nach der 25ſten lehren.

Durch die Diagonalen c b und c d wird das Vieleck A, in drey Dreyecke zerlegt. Man zeichnet nun das Dreyeck 1, = 1, 2 = 2, wie vorhin in den Vierecken Fig. 24; und über h i, welche Diagonal = c d, ferner △ 3 = △ 3; ſo ſind in A und B die gleichliegenden Dreyecke 1 = 1,

2 = 2, 3 = 3, alſo da die ſämmtlichen Theile der ganzen Figur da, und einander gleich ſind, ſo müſſen auch die Figuren im Ganzen genommen einander gleich ſeyn A = B.

Beyläufig will ich auch noch darauf aufmerkſam machen, daß es einleuchten müſſe, „man könne „durch die Zerlegung der Figuren in Dreyecke auch „ausmitteln, wie viel rechte Winkel ſolche habe.“ Denn da jedes Dreyeck bekanntlich nur 2 R in der Summe ſeiner 3 Winkel betragen kann, ſo braucht man nur die Zahl der Dreiecke mit 2 zu multipliciren, um die Anzahl der R zu erforſchen. In den vorſtehenden Figuren A und B, zählt man 3 Dreyecke, alſo 3 . 2 = 6 R. — Mehreres ſoll hierüber in der Abhandlung über Vielecke, geſagt werden.

Zum gewöhnlichen Parallelenziehen und Errichtung der Perpendikel, bedient man ſich des in allen Reißzeugen befindlichen rechtwinklichten hölzernen Dreyecks und Linials niemals am bequemſten; wenn ſolche richtig gearbeitet ſind, — wie ſolche geprüft und berichtigt werden können, muß in der Folge gezeigt werden. — Man legt die ſchräge Seite des Dreyecks (die Hypotenuſe), an das Linial, und ſchiebt an ſolchem dieſes Dreyeck auf und ab, ſo laſſen ſich zu beyden Seiten (an den Catheten) des Dreyecks nicht nur Parallelen, ſondern, da die Seiten ſenkrecht auf einander ſtehn (ſie bilden ja ein rechtwinklichtes Dreyeck) auch ſenkrechte Linien, Linien, welche ſich im rechten Winkel treffen, zu

einander ziehn. Beſonders muß man dabey aber auf die feſte Haltung des Linials ſehn, wird dieſes verrückt, ſo entſtehn zwar wieder parallele Linien und rechte Winkel, allein nur nicht mit denen, welche bey der erſten Lage des Linials gezogen waren, ſondern unter ſich, die bey der letzten Lage deſſelben gezogen ſind.

Das Ziehen der Parallelen durch die ſogenannte Reißſchiene oder Anſchlaglinial, auf Reißbrettern, beruht auf denſelben Grundſätzen.

Parallel-Liniale, das heißt Liniale, welche beſonders zum Zeichnen der Parallelen eingerichtet ſind, und wovon in der Folge ein Mehreres, ſind dem Gebrauche des Dreyecks und Linials in Verbindung, zu demſelben Zwecke, weit nachzuſetzen.

b. Aehnlichkeit der Dreyecke und Figuren überhaupt.

§. 132.

Erklärungen.

Aus der Arithmetik kennen wir die Entſtehung der Verhältniſſe und Proportionen. —

Daß auch ſolche in der Geometrie Statt finden,

wird ſelbſt der Anfänger ſchon daher vermuthet haben:

„daß man dort, geometriſche Verhältniſſe „und Proportionen aufführte;“

ja dieſer Name iſt älter, als der, der arithmetiſchen.

In der Geometrie ſelbſt, ſtehen in den Proportionen Statt der Zahlen nur Linien als Glieder, (welche in Figuren Seiten heißen): ſo wie die Verhältniſſe, durch die Buchſtaben, welche die Linien bezeichnen, ausgedrückt werden. Uebrigens gilt auch hier alles das, was in der Arithmetik, in der Lehre von den geometriſchen Verhältniſſen und Proportionen, geſagt worden iſt.

Proportional, heißen dort diejenigen Zahlen, welche als Glieder gleicher Verhältniſſe, Proportionen bildeten — wie 3, 4, 6, 8, wegen 3:4=6:8 —

Eben ſo nennt man mit Recht nun hier auch diejenigen Linien oder Seiten proportional, welche die Stelle jener Zahlen einnehmen; das heißt, welche gleiche Verhältniſſe haben, und durch ordnungsmäßigen Anſatz, alſo Proportionen bilden können.

In zweyen Dreyecken heißen z. B. diejenigen Seiten proportional: welche Glieder gleicher Verhältniſſe ſind, und in ſolchen einerley Stelle haben.

In den Dreyecken ABC und abc, Fig. 27 ſind AB und AC den Seiten ab und ac deshalb proportional, weil AB in AC ſo vielmal enthalten

iſt, als ab in ac, nemlich $1\frac{1}{3}$ mal; ſie bilden alſo 2 gleiche Verhältniſſe, (denn ihr Exponent iſt in beyden $1\frac{1}{3}$) und dadurch mit einander die Proportion AB : AC = ab : ac.

Aber auch BC und bc ſind hier proportionale Seiten, weil BC ſo oft in BA, als bc in ba, nemlich $1\frac{1}{3}$ mal enthalten iſt: folglich ſind alle 3 Seiten des △ ABC, AB, BC, AC, mit den zu ihnen gehörigen Seiten des △ abc, proportional.

§. 133.

Die Proportionalität zweyer Seitenpaare zweyer Dreyecke erforſcht man, wenn man die erſte Seite in ſo viele ſchickliche gleiche Theile eintheilt, daß eine gewiſſe Anzahl derſelben, die zweyte Seite, welche mit der erſten ein und daſſelbe Verhältniß bildet, genau erſchöpft. — Als hier in Fig. 27. AB in 3 gleiche Theile getheilt, ergiebt Theile, deren einer genau viermal in AC enthalten war.

Nun theilt man die dritte in ſolche gleiche Theile, deren einer ein oder mehrere male genommen, ebenfalls die vierte genau ausmacht. — Kürzer könnte man die dritte in eben ſo viele Theile, als die erſte, eintheilen, und mit einem ſolchen Theile dann die vierte, meſſen; doch iſt ſolches we-

gen der gewöhnlich dabey entſtehenden Brüche, nicht angenehm. — Fig. 27, ab als die dritte, in 6 gleiche Theile, giebt für ac, 8 gleiche Theile.

Bildeten nun die Zahlen der Theile, der vierten und dritten Linie, ein gleiches Verhältniß, als die Zahlen der zweyten und erſten Linie, ſo wären die Linien proportional.

Hier hat man nun AB in 3 Theile, AC in 4 Theile und ab in 6 Theile, ac in 8.; alſo, wie AB:AC, ſo ihre Theile 3:4; und wie ab:ac, ſo deren Theile 6:8; woraus die beyden gleichen Verhältniſſe:

$$\left.\begin{array}{l} 3:4 = 6:8 \\ \text{oder } 1:1\tfrac{1}{3} = 1:1\tfrac{2}{6} = 1\tfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

Hätte man ab in 3 Theile getheilt, wie die erſte Linie, ſo hätte ſich für dieſesmal ac ſogleich, ohne Unbeqemlichkeit, in 4 Theilen gegeben; wie auch die Fig. 27. anſchaulich zeigt.

§. 134.

Vorbereitung.

1ſter Lehrſatz. — Fig. 28. — Wenn man aus der Spitze irgend eines Winkels — hier A — auf einen ſeiner Schenkel eine willkürliche Anzahl gleicher Theile aufträgt, — hier auf AJ, 7 Theile, als AB, BD ꝛc., und aus einem ihrer Puncte, zu irgend einem andern

auf dem zweyten Schenkel zu wählenden, eine Linie zieht; — hier z. B. aus J zum — zu dieſer Linie aber wieder durch alle übrigen Puncte, Parallelen durch den 2ten Schenkel; — hier Hl, Gk, Fi, Eh ꝛc. — ſo werden auf ſolchen eine gleiche Anzahl, und auch unter ſich gleicher Theile, abgeſchnitten.

Beweis.

Zu Am, ziehe man die Parallelen Ba, Db ꝛc. und verlängere ſich zu mehrerer Deutlichkeit oder leichterer Ueberſicht, nach † und φ Parallelen, ſo liegt ∟x und ∟y, an einer Seite der durchſchneidenden Linie, und da ∟x, der entgegengeſetzte innere Winkel von dem entgegengeſetzten äuſſern ∟y, ſo iſt ſolcher — wie in den Beweiſen über den Parallelismus gezeigt iſt, dem ∟y gleich. Ebenfalls iſt auch ∟z, als entgegengeſetzter innerer Winkel, ſeinem entgegengeſetzten äuſſern ∟v gleich; alſo x = y und v = z. Es iſt AB aber auch = BD. — Da nun nach dem 5ten Lehrſatze §. 121, „zwey Dreyecke, „welche eine Seite und 2 gleichliegende Winkel ha„ben, congruent ſind", und dieſes jetzt in dem 1ſten und 2ten △ Statt findet: ſo ſind ſolche auch congruent, und alſo in beyden alle Stücke gleich.

Daß nun eben ſo leicht die Congruenz aller übrigen Dreyecke mit dieſen, und alſo unter einander, erwieſen werden könne, wird von ſelbſt einleuchten; denn ∟w und ∟x; ∟π und ∟v, ſind auch entgegen-

geſetzte äuſſere und innere Winkel, und ſich daher gleich.

Wenn aber die Congruenz aller Dreyecke ſo erwieſen iſt, ſo müſſen auch alle ihre gleichliegenden Seiten, gleich ſeyn; Ba = Db = Ec ꝛc.

Da nun Cg und Ba Parallelen ſind, und wieder zwiſchen Parallelen liegen, ſo ſind auch ſolche einander gleich, — denn Parallelen zwiſchen Parallelen ſind gleich. — Sind aber dieſe Linien gleich, ſo ſind es auch die übrigen auf A m liegenden Theile. Denn Db und gh liegen auch zwiſchen Parallelen, alſo D b = g h; und D b = Ba, B a = c g; alſo auch g h = c g ꝛc.

§. 135.

Aufgabe.

Eine gegebene Linie in eine beſtimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen. — Fig. 28. A m in 7 Theile.

Aufloͤſung.

Man ziehe ſich zu einem der Endpuncte der gegebenen Linie — hier ſey es A — eine Linie, welche mit ſolcher irgend einen Winkel macht; — hier alſo A d — Trage auf ſolcher eine gleiche Anzahl willkürlich zu nehmender gleichen Theile aus dem Winkelpuncte auf; — hier aus A, alſo 7 Theile nach l — verbinde den letzten Theilpunct mit dem

Endpuncte des 2ten Schenkels durch eine gerade Linie — hier I mit m durch I m — und ziehe zu ſolcher durch alle auf dem erſten Schenkel aufgetragene Theilpuncte, Parallelen; — hier alſo H l, G k ꝛc. — dieſe werden die gegebene Linie in die verlangten gleichen Theile theilen.

— Daß dieſe Auflöſung richtig ſey, bedarf wohl keines weitern Beweiſes, ſondern bloß der Einſicht in den Beweis des ſo eben vorgetragenen Lehrſatzes.

§. 136.

2ter Lehrſatz. Fig. 28 wird mit der Grundlinie eines Dreyecks, zwiſchen ſeinen Schenkeln eine Parallele gezogen, ſo entſtehen folgende Verhältniſſe und Proportionen.

— Das Dreyeck iſt hier A J m, und D g die durchſchneidende Parallele zu I m.

A. In Rückſicht der Schenkel.

1. Das durch die gezogene Parallele (D g) von der einen Seite oberhalb abgeſchnittenen Stück (AB) verhält ſich zu ſeiner ganzen Seite (A I), wie das ebenfalls abgeſchnittene gleichliegende Stück der andern Seite (A C), zu dieſer ſeiner ganzen Seite (A m).

Alſo A B : A I : = A C : A m

2. Das abgeſchnittene obere Stück der einen Seite (A B), zu dem obern abgeſchnittenen Stücke der andern Seite, (A C) wie das unterhalb abgeſchnittene Stück der erſten, zu dem untern Stücke der andern.

Alſo A B: A C = B I: C m.

3. Die ganzen Seiten zu einander, wie die unterhalb abgeſchnittenen Stücke.

Alſo A I: A m = B I: C m.

B. In Rückſicht der zwiſchen den Schenkeln liegenden Parallelen.

— Das Stück der einen Seite zu der Parallele, wie dieſe ganze Seite zu der Grundlinie.

Alſo A B: B C = AD: Dg.

§. 137.

Beweiſe für A.

Ad 1; AB : AI = AC : Am. Fig. 28.

Unverkennbar iſt der Satz AB: AI = AC: A m; eine geometriſche Proportion; deren Richtigkeit wir alſo zu beweiſen haben.

Nach dem 1ſten Lehrſatze §. 134. iſt bereits die Proportionalität dieſer Linien feſt erwieſen; denn nach ſolchen iſt A B ſo oft in A I als A C in A m, nemlich ſiebenmal enthalten — alſo 7 ihr Exponent,

folglich ſind die Verhältniſſe AB : AI = AC : Am; alſo erwieſen eine richtige Proportion.

Auch durch Zahlen kann man ſich ſolche darſtellen.

Hier in dieſer Figur iſt das Stück A C um $\frac{1}{2}$ größer als A B; das heißt: „wenn A B in 2 gleiche Theile getheilt wird, ſo wird einer von ſolchen 3mal genommen = A C ſeyn; und folglich halten die beyderſeitigen 7 gleichen Stücke, der Seite A I und Am, 7. 2 = 14, und 7. 3 = 21 Theile. Setzen wir nun Statt der Linien dieſe Zahlen, welche deren Theile ausdrücken, in eine Proportion an, als A B = 2, A C = 3, A I = 14 und A m = 21,

alſo 2 : 14 = 3 : 21; folglich die Proportion richtig.
. . ..42.. . .
. . . ..42. . ..

Man kann ſich aus dieſem die ohngefähre Veranlaſſung erklären, warum die alten Mathematiker in der Arithmetik den Namen **geometriſche Proportion**, aufnahmen.

Anmerkung.

Da die Gewandheit in dem Anſatze und Umſtellung der geometriſchen Proportionen, in der Geometrie, beſonders in der Lehre von der **Aehnlichkeit** der Figuren wichtig wird, da ihre Sätze durchaus geometriſche Proportionalſätze ſind; und weil der Anfänger gewöhnlich wegen der richtigen Umſtellung der Glieder etwas unbeſtimmt zu ſeyn pflegt, auch ſich daher öfterer Fragen vor-

legt, welche er nicht mit Ueberzeugung zu löſen vermag; z. E. ob in der obigen Figur und der Proportion A B: A I = A C: A m nicht auch geleſen werden könne: „A B verhalte ſich zu A C, wie A I: A m;“ ſo will ich darüber in der möglichſten Kürze das Nöthige, hierher abſichtlich Verſparte, auseinander ſetzen; es wird jedem Lernenden bey zweifelhaften Fällen gewiſſermaßen zum Anhaltspunkte dienen.

Umſtellung der Proportional-Glieder.

Es ſind nur 4 Hauptumſtellungen möglich, welche die Richtigkeit der Proportionen nicht aufheben; nemlich 2 Veränderungen, wobey die Proportionen zunehmende bleiben, und 2 Veränderungen, worin ſolche abnehmende werden. Zu den erſtern gehören bekanntlich zunehmende Verhältniſſe, wo die kleinere Zahl deſſelben Verhältniſſes das vordere Glied iſt; zu den letztern aber abnehmende Verhältniſſe, wo die größere Zahl das vordere Glied iſt.

In jeder Hauptſtellung können aber wieder, jedoch ohne daß die Proportion im geringſten dadurch beleidiget wird, die mittlern Glieder verwechſelt werden, denn es iſt einerlei, ob man 21. 2, oder 2. 21 ſagt, — das Product bleibt daſſelbe.

Angenommen, man wünſchte jene Proportion

AB: AI = AC: Am
2: 14 = 3: 21

nach obigen Aeußerungen verändert zu ſehen; ſo ſollen hier zuerſt die zunehmenden, dann die ab-

nehmenden Proportionsſtellungen, und eben ſo die Umſtellung ihrer mittlern Glieder gezeigt werden.

		V V
zunehmende	2 : 14 = 3 : 21	AB : AI = AC : Am
		V V
	3 : 21 = 2 : 14	AC : Am = AB : AI
		V V
abnehmende	14 : 2 = 21 : 3	AI : AB = Am : AC
		V V
	21 : 3 = 14 : 2	Am : AC = AI : AB

Verwechſelung der mittlern Glieder.

aus den zu-	2 : 3 = 14 : 21	AB : AC = AI : Am*
nehmenden	3 : 2 = 21 : 14	AC : AB = Am : AJ
aus den ab-	14 : 21 = 2 : 3	AI : Am = AB : AC
nehmenden	21 : 14 = 3 : 2	Am : AI = AC : AB

Um ſolche Umſtellungen mit Zuverläſſigkeit vorzunehmen, und die Proportionen ſelbſt ohne Anſatz, durch Uebung, ſogleich leſen zu lernen; ſo bemerke man „daß man nur immer zuerſt 2 zunehmende Proportionsumſtellungen nach Ueberzeugung richtig vornehmen müſſe; dann folgen die abnehmenden; dann Bewechſelung der mittlern Glieder in der gehörigen Ordnung.“

Obige Frage; „ob AB auch ſich zu AC verhalte, wie AI : Am? iſt durch dieſe Stellungen beantwortet; man wird ſolche bey * finden. Aus der als richtig anerkannten Proportion, ſind obige Veränderungen gefolgert, und der Anfänger darf nur den Gang aufſuchen, durch welchen man zur Beantwor-

tung der Frage gekommen iſt, und ſich in ähnlichen Auflöſungen üben.

Da bey den Buchſtaben es nicht jederzeit gut zu merken iſt, welches das größere oder kleinere Glied ſey, ſo ſetze man ein Zeichen über die beyden kleinern oder größern; und zwar das bekannte Zeichen des größern oder kleinern $>$ $<$ in die Höhe geſtellt $\vee\wedge$. Man präge ſich nur recht lebhaft ein, „daß in beyden Verhältniſſen, ſtets die kleinere das vordere Glied, oder ſtets die größern das Vorderglied machen müſſe; ſo kann man nicht fehlen.

§. 138.

Ad 2. AB : AC = BI : Cm.

Man prüfe nach §. 133, die Proportionalität dieſer Linien, und theile nemlich AB, in ſo viele gleiche Theile, daß einer davon in einer gewiſſen Anzahl genommen, AC gleich wird. AC erhält nun daher 2 Theile, deren einer 3mal in AC enthalten iſt; folglich AB : AC = 2 : 3.

Ferner BI ebenfalls in 2 Theile, ſo mißt ein Theil von ſolchen das Stück Cm, 3 mal; oder Cm iſt gerade 3mal ſo lang: alſo auch BI : Cm = 2 : 3; folglich die Verhältniſſe gleich, und der ordnungsmäßige Anſatz derſelben, AB : AC = BI : Cm giebt eine richtige Proportion.

Noch deutlicher wird ſolches für den gegenwärtigeu Fall, wenn man ſich erinnert, daß AI 7 glei-

che Theile hat, und daß BI 6 Theile davon faßt. Jeden derſelben nun wie AB in 2 gleiche Theile getheilt, gäbe 6.2 = 12, für BI.

Eben ſo hält bekanntlich auch Am 7 gleiche Theile, und alſo Cm ebenfalls 6, da nun AC, 3 ſolcher gleichen Theile als AB, 2 enthält, und AC = Cg = gh ꝛc., ſo iſt Cm = 6.3 = 18; folglich AC : Cm = 12 : 18 = 2 : 3. Weil auch ferner AB : AC = 2 : 3, ſo iſt die Proportion richtig. — Man kann dieſes Ganze ſelbſt auf der Figur abzählen.

Zuſatz.

Aus AB : AC = BI : Cm, läßt ſich nun auch nach dem Vorhergehenden die Proportion herleiten, AB : BI = AC : Cm, das heiſt: „Die Stücke der „einen Seite verhalten ſich zu einander, wie die „Stücke der andern Seite. — Oder die Stücke „beyder Seiten, ſind in ihrer Ordnung proportional.“ — Eben ſo auch aus jener Proportion, „BJ : Cm = AB : AC.“

§. 139.

Ad 3, AI : Am = BI : Cm.

Da aus der erſten Proportion und dem Beweiſe darüber, folgt: „daß durch Verwechſelung der mittlern Glieder, „aus AB : AI = AC : Am, die Proportion AB : AC = AI : Am entſtehen könne; und nach Zuſatz §. 138. auch AB : AC = BI : Cm; ſo iſt auch wegen der gleichen Verhältniſſe AI : Am =

B l : C m; folglich obige zu beweiſende Proportion ſogleich erwieſen.

§. 140.

Beweis für B.

$$\left.\begin{array}{l} AB : BC = AD : Dg \\ \text{oder auch } AB : BC = Al : lm. \end{array}\right\}$$

Man ziehe aus B zu A g die Parallele B a; ſo iſt B a = C g, weil ſolche zwiſchen Parallelen liegen. Es iſt aber auch ferner nach dem 1ten Lehrſatze §. 134 B C = D a; und B C muß ebenfalls = a g ſeyn, da auch ſolche zwiſchen Parallelen liegen; und D a iſt auch = a g.

Ferner erhält man nach Verwechslung der mittlern Glieder B C und A D die Proportion „A B : A D = B C : „D g;“ und es iſt nach der Bedingung des obigen 1ten Lehrſatzes A B = A D, als aufgetragene gleiche Theile, und als gleichliegende Seiten 2er congruenten Dreyecke. Daher verhält ſich nun ferner AB : AD, wie BC : D g; die Verhältniſſe ſind alſo richtig — das eine Stück war aus ſeinem Ganzen, wie das andere aus ſeinem Ganzen entſtanden.

Der Beweis für die Proportion, „A B : B C = A l : l m iſt in dem ſo eben geführten, zugleich mit enthalten; indem der Lehrſatz, von welchem alle bis-

her vorgetragene Proportionen erwieſen worden ſind, allgemein für jedes Dreyeck, alſo nicht bloß für ein Dreyeck wie ADg, ſondern auch für ein △ AIm gilt. Man darf auch nur die Parallelen Ba, Db, Ec Fd, Ge, Hf bis auf die Grundlinien verlängern, ſo wird man auf Im ſo viele gleiche Theile des BC abgeſchnitten finden, als AI von AB enthält; denn durch jeden Theilungspunkt wurden Parallelen gezogen; deren jede ein Stück, welches ſo groß als BC, abſchneiden mußte, und welche ſo an Anzahl wuchſen, als dies Stücke der Seiten.

Die erſte Parallele durch den 1ten Punkt B ſchnitt 2 gleich große Stücke, die Parallele durch den 2ten Punct D 3 ſolcher Stücke ꝛc. alſo der 7te Punct 7 Stücke auf Jm ab. Nun erhält man durch die Verwechslung der mittlern Glieder BC und AJ; „auch „AB: AJ = BC: Im, das heißt: es ſey AB und AJ wie BC und Jm proportional, welches ſo eben erwieſen iſt.

§. 141.

3ter Lehrſatz. Verhalten ſich die in einem Dreyecke von einer großen Linie abgeſchnittene obere Stücke, wie ihre ganzen Seiten zu einander; ſo iſt die durchſchneidende Linie mit der Grundlinie parallel.

Fig. 29, ſoll BC die abſchneidende Linie ſeyn, und AB : AC = AJ : Am.

Beweis.

Wäre auch BC nicht parallel mit Jm, ſo kann doch ſicher durch B eine ſolche Parallele gezogen werden, welche natürlich entweder ober- oder unterhalb BC fallen müßte.

Nehmen wir hier die Parallele unterhalb an, z. B. in BF — ſo erhält man nach der 1ſten Proportion des letzten Lehrſatzes,

AJ : Am = AB : AF. Nun ſoll aber nach der Theſi,
AJ : Am = AB : AC, ſich verhalten; alſo wegen der gleichen Verhältniſſe, AJ:Am ſ
iſt nun auch AB : AF = AB : AC, und durch Verwechslung der mittlern Glieder.
AB : AB = AF : AC.

Folglich wäre AF ſo oft in AC enthalten, als AB in AB, das heißt nur einmal; oder es wäre AF = AC, wie AB = AB, welches aber offenbar falſch iſt, denn AF iſt ja auffallend größer als AC; daher kann die Parallele nicht unterhalb AC fallen. Nimmt man ſolche aber oberhalb an, als in Bf, ſo ergiebt, AJ : Am = AB : Af
und die Theſis war AJ : Am = AB : AC

alſo AB : Af = AB : AC
oder AB : AB = Af : AC
folglich AB = AB u. Af = AC

Dieſes iſt aber auch nicht möglich, denn Af

iſt ja nach der Zeichnung viel kleiner als AC. Da nun die Parallele nicht unterhalb und nicht oberhalb BC liegen kann, ſo muß ſolche, dieſe Parallele ſelbſt ſeyn. — Alſo BC parallel Jm.

§. 142.

4ter Lehrſatz. Wenn in Dreyecken, eine, aus der Spitze eines Winkels innerhalb auf die gegenüberſtehende Seite gezogene Linie, den Winkel, aus welchem ſolche gezogen wurde, halbirt, ſo ſind die Stücke dieſer Seite, denen Seiten, welche jenen Winkel einſchließen, proportional; und umgekehrt.

Nach Fig. 30.* Wenn $\angle y = \angle z$, ſo iſt $AD:DB = AC:CB$. Umgekehrt — wenn $AD:DB = AC:CB$, ſo iſt $\angle y = \angle z$.

Beweis ad 1.

Man ziehe aus A, mit DC, eine Parallele; und verlängere BC, bis ſolche dieſe Parallele ſchneidet.

Dann iſt $\llcorner \pi = \llcorner z$; als äußere und innere entgegengeſetzte Winkel an einer Seite der die Parallelen AE u. DC durchſchneidende BE.

$\llcorner v = \llcorner y$, als Wechſelswinkel.
$\llcorner y = \llcorner z$ — nach der Theſis.

alſo $\llcorner \pi = \llcorner v$.

Da nun AD:DB = EC:CB — nach dem Zuſatze des §. 138 — alſo auch AD : DB = AC (Statt EC) : CB — folglich iſt der Satz bewieſen.

Beweis. ad 2.

Man verlängere BC ſo weit, daß CE = AC werde, und ziehe AE. Dann hat man, wegen dieſer gleichen Seiten, auch $\llcorner v = \llcorner \pi$; — denn nach §. 122. ſtehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. —

Und da nun $\llcorner v = y$; und $\llcorner \pi = z$, ſo iſt auch $y = z$, und der Satz bewieſen.

§. 143.

Von der Aehnlichkeit der Dreyecke und der Figuren.

Erklärungen.

Figuren heißen und ſind ähnlich, wenn die gleichliegenden Winkel in ſolchen einander gleich, die 2 liegenden Seiten aber, welche einen ſolchen gleich-

liegenden Winkel bilden, einander proportional ſind — oder kürzer, wenn die gleichliegenden Winkel gleich, und die gleichliegenden Seiten proportional ſind; wenn ſich Figuren durch nichts als bloß ihre Größe unterſcheiden laſſen.

Daß Gleichheit der Winkel, und Proportionalität der Seiten alſo die Eigenſchaften ſind, welche zweyen ähnlich ſeyn ſollenden Figuren eigen ſeyn müſſen, wird aus dieſem Geſagten auffallen; und der Unterſchied zwiſchen der Aehnlichkeit und der Congruenz, beſteht alſo darinn, daß dieſe außer den gleichen Winkeln, auch gleiche Seiten verlangt.

Anmerkung.

Man nennt auch die gleichliegenden Seiten und Winkel, gleichnamichte. Fig. 27, ſind A und a, B u. b, C u. c gleichliegende oder gleichnamichte Winkel; ſo wie AB und ab, AC und ac, und BC und bc, gleichliegende oder gleichnamichte Seiten heißen. In allen ähnlichen Figuren heißen daher auch die Linien, welche mit gleichnamichten Seiten oder Diagonalen gleiche Winkel bilden, gleichnamichte Linien; und die Dreyecke, welche in Fig. 25 und 26, von ſolchen Linien abgeſchnitten werden, heißen ähnlich liegende: als 1 und 1, 2 und 2, 3 und 3.

§. 144.

Die Aehnlichkeit der Dreyecke, kann man

aus folgenden Eigenſchaften derſelben erkennen und beweiſen, nemlich:

1. Wenn in ſolchen 2 oder alle 3 Winkel gleich ſind.

2. wenn alle 3 Seiten in beyden proportional ſind.

3. Wenn nur 2 Seiten in dem einen, zwey Seiten in dem andern proportional ſind; jedes Paar aber in ſeinem Dreyecke, einen Winkel einſchließt, welcher ſo groß iſt, als der, vom andern Paare, eingeſchloſſene.

4 Wenn 2 Seiten des einen, und zwey Seiten des andern Dreyecks proportional, und die der größern von dieſen 2 Seiten in jedem Dreyecke gegenüberliegende Winkel, einander gleich ſind.

Die Aehnlichkeit der Figuren, erkennt man aus der Gleichheit der Winkel und Proportionalität der gleichnamichten Seiten. — Man überzeugt ſich von ſolcher durch die Zerlegung der Figuren in ähnlich liegende Dreyecke, und daß man den Beweis der Aehnlichkeit von zweyen zu zweyen derſelben aufſucht, und findet. — Sind dieſe ſämmtlichen Dreyecke in ihrer Ordnung (als die Theile der beyden ganzen Figuren) einander ähnlich, ſo müſſen ja auch die Figuren als die Ganzen ſelbſt, ähnlich ſeyn.

Sich von der Aehnlichkeit 2er Dreyecke zu

überzeugen, iſt alſo ſo unentbehrlich, als wichtig; und ſollen die Beweiſe:

„daß 2 Dreyecke in obigen 4 Fällen wirklich „ähnlich ſind, jetzt folgen.“ Dieſe 4 Fälle eignen ſich wie die, für die Congruenz der Dreyecke aufgeſtellten Fälle, zu Lehrſätzen deren Beweis etwas Nachdenken und eine ſorgſame Aufmerkſamkeit erfordert. Vorläufig über den ungemeinen Nutzen dieſer Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke:

„daß die Kenntniß von ſolcher und der Congru„enz, dem practiſchen Geometer eben ſo un„entbehrlich und wichtig ſey, als dem „practiſchen Rechner die Regel de Tri.

§. 145.

1ſter Lehrſatz. Wenn zwey oder alle drey Winkel in zweyen Dreyecken gleich ſind, ſo ſind ſolche Dreyecke ähnlich.

Fig. 29 ſind in $\triangle$ a und $\triangle$ b, der $\llcorner$ x $=$ $\llcorner$ y, und der $\llcorner$ v $=$ $\llcorner$ w; alſo weil $\llcorner$ x $=$ $\llcorner$ y, und $\llcorner$ v $=$ $\llcorner$ w, ſoll $\triangle$ a $\sim$ $\triangle$ b.

Beweis.

Auf AJ und Am trage man aus A die Seiten GH und GJ, ſo, daß AB $=$ GH und AC $=$ GJ werde, und ziehe BC; ſo ſind die Dreyecke ABC und GHJ congruent.

Da der $\angle\delta = \angle v$, und der $\angle v = w$. Es ſind alſo in beyden Dreyecken, ABC und AJm, die 3 Winkel gleich; der $\angle\alpha = \beta$; denn beyde ſind Supplemente gleicher Winkel zu 2 R.

Jetzt iſt alſo das eine Erforderniß, „Gleich„heit der Winkel erwieſen,“ es muß alſo noch das andere Erforderniß, „die Proportionalität „der Seiten erwieſen werden.

Da der $\angle\delta = \angle w$, ſo iſt BC auch parallel mit Jm; und daher denn auch

nach §. 139 AB : AC = AJ : Am
nach §. 140 AB : BC = AJ : Jm
und AC : BC = Am : Jm

Folglich auch die Proportionalität der Seiten, und alſo auch die Aehnlichkeit der Dreyecke ABC und AJm erwieſen; da aber △ ABC congruent mit △ b, ſo gilt auch das, was vom △ ABC erwieſen iſt, für △ b, und iſt alſo auch dieſes dem △ AJm (oder a genannt) ähnlich.

Zuſatz.

Aus dieſem leuchtet ſo fort ein, „daß eine in„nerhalb eines Dreyecks mit der Grundlinie parallel „gezogene andere Linie, oberhalb derſelben, ein die„ſem Dreyecke ähnliches, abſchneide. BC war parallel mit Jm und ſchnitt, wie wir geſehen haben, das dem △ AJm oder a ähnliche △ ABC, ab.

Anmerkung.

Sind Anfänger nicht ſehr aufmerkſam, ſo ver-

wechſeln ſolche, wenn ſie die Verhältniſſe zweyer Seitenpaare als in Proportion ſtehend, zeigen wollen, öfterer die Seiten im Anſatze, und ſetzen, Statt wie hier, AB : AC = AJ : Am

wohl AB : AC = Am : AJ

welches falſch iſt; denn AB : AC iſt ein zunehmendes Verhältniß, weil AB < AC; aber Am : AJ iſt, weil Am > AJ, ein abnehmendes Verhältniß; — eine Proportion kann aber bekanntlich nur entweder 2 zunehmende oder 2 abnehmende Verhältniſſe haben.

Dieſes zu verhüten, muß man ſich feſt einprägen:

a. Daß bloß aus gleichliegenden Seitenpaaren 2er Dreyecke, Proportionen gebildet werden können; wie hier aus AB, AC, AJ, Am; nicht aber aus AB, AC, AJ, Jm ꝛc. denn Jm iſt nicht die gleichliegende Seite von AC, ſondern Am.

b. Daß ſtets 2 gleichliegende Seiten die Vorder-, und 2 dergleichen die Hinterglieder in den Verhältniſſen einer Proportion ſeyn müſſen. Hier machen AB und AJ zuſammen, als gleichnamichte Seiten, die Vorder- AC und Am als ſolche, die Hinterglieder der Verhältniſſe aus.

§. 146.

2ter Lehrſatz. Zwey Dreyecke ſind

ähnlich, wenn in beyden alle gleichliegende Seiten proportional ſind.

Fig. 29 ſoll △a ∾ △b, wenn {AJ : Am = GH : GJ; AJ : Jm = GH : HJ; Am : Jm = GJ : HJ}

Beweis.

Da die Proportionalität der Seiten hier ſchon als die Bedingung eingeräumt worden iſt, nach welcher die Aehnlichkeit obiger Dreyecke erforſcht werden ſoll; ſo hat man hier bloß das 2te Erforderniß, „die Gleichheit der Winkel aufzuſuchen und zu beweiſen. Dieſes geſchieht auf folgende Art.

Man trage die Seiten GH und GJ aus A, als der Spitze des gleichnamichten Winkels von G, nach B und C, und ziehe BC, ſo wird ſolche mit Jm parallel ſeyn. Denn da ſich AJ : Am = GH : GJ — nach der Theſis verhalten ſoll; und AB = GH, AC = GJ genommen iſt, ſo bleibt auch die Proportion unverändert, „wenn AB an die Stelle „von GH und AC an die Stelle von GJ geſetzt „wird, (welches man eine Größe für die andere „ſubſtituiren,“ nennt;) und man erhält A : Am = AB : AC.

Es gründet ſich ja aber die Proportion AJ : Am = AB : AC auf das Parallelſeyn BC und Jm, indem ſolche in dem 2ten Lehrſatze gegründet iſt; alſo iſt auch B ≠ Jm.

Dann ergiebt ſich aber auch, wenn dieſes erwieſen,

a. Daß die △ ABC und AJm ähnlich ſind; denn der ∟ δ = ∟ w ∟ α = ∟ β und ∟ y als beyden Dreyecken gemeinſchaftlich und ſich ſelbſt gleich. Die Proportionalität der Seiten, wird man nach dem Vorhergehenden ohne ein weiteres, von ſelbſt einſehen;

denn AB : AC = AJ : Am
AB : BC = AJ : Jm
AC : BC = Am : Jm

b. Die Propor- AJ : Jm = AB : BC. Nun tion ſoll aber auch AJ : Jm = GH : HJ nach der Theſis ſeyn,

folglich iſt auch AB : BC = GH : HJ.
oder AB : GH = BC : HJ.

Da nun AB = GH genommen worden iſt, ſo muß auch BC = HJ ſeyn, ſonſt würden beyde Verhältniſſe ungleiche Exponenten haben. AB iſt in GH nur einmal enthalten, und deshalb kann auch BC in HJ nur einmal enthalten ſeyn. Man hat jetzt

AB = GH,
AC = GJ; es wurde ja AC = GJ aus A abgeſetzt.
BC = HJ

alſo in den Dreyecken ABC und GHJ, alle 3 Seiten gleich, folglich ſind ſolche congruent, — 2ter Lehrſatz §. 121 — die Aehnlichkeit der Dreyecke ABC und AJm, iſt aber bereits erwieſen, folglich dadurch wegen der Congruenz zwiſchen △ ABC und

$\triangle$ GHJ, auch für $\triangle$ AJm oder a, und $\triangle$ GHJ oder b.

§. 147.

3ter Lehrſatz. Wenn in zweyen Dreyecken 2 Seitenpaare proportionirt ſind, und der von dieſen in beyden eingeſchloſſene Winkel gleich iſt, ſo ſind ſie ähnlich.

Fig. 29 ſoll $\triangle a \backsim \triangle b$, wenn $AJ : Am = GH : GJ$ und der $\angle x = \angle y$.

Beweis.

Um die Aehnlichkeit zu beweiſen, müſſen wir bekanntlich die Gleichheit aller Winkel und die Proportionalität aller Seiten, darthun.

In dem erſten und zweyten Lehrſatze, war in jedem nur ein Erforderniß, nämlich Gleichheit der Winkel oder Proportionalität der Seiten — die erſtern im 1ten, die zweyten im 2ten Lehrſatze, in der Theſis mitgegeben; folglich brauchte daſelbſt nur das fehlende zweyte Erforderniß bewieſen zu werden.

Da hier — im 3ten Lehrſatze — aber bloß Stücke der Erforderniſſe gegeben ſind, ſo ſind auch beyde

„Gleichheit der Winkel und
Proportionalität der Seiten, in Nachſtehendem zu beweiſen.

Man lege den Winkel x mit ſeinen Schenkeln

auf den ∟ y; — dann wird AB=GH und AC =GJ — und ziehe BC, ſo iſt △ABC ≌ △GHJ; — vide Lehrſatz 3, §. 121. —

Nach der Theſis ſollen ſich ferner die ganzen Seiten wie ihre Stücke zu einander verhalten; nemlich AJ:Am=GH:GJ. Da nun bekanntlich AB=GH und AC=GJ, ſo können ſolche auch für einander geſetzt werden und man erhält AJ:Am=AB:AC, welche Proportion jenes Verhältniß der Ganzen zu einander wie der Theile ausdrückt. Findet dieſe Proportion aber Statt, ſo iſt auch BC ∦ mit Jm — vide §. 141, 3ter Lehrſatz — und iſt dieſes richtig, ſo wird auch nach dem Zuſatze des vorhergehenden Paragraphs, das △ABC ∾ △GHJ ſeyn.

— Anfänger können ſich zur Uebung, dieſe Aehnlichkeit auch beſonders auf dieſelbe Art, wie ſolche in dem §. 146 bewieſen worden iſt, zu beweiſen ſuchen.

Iſt aber △ABC ∾ △AJm, ſo iſt auch △AJm (oder a) ∾ △GHJ (oder b) weil △ABC ≌ △GHJ, — congruent — wie vorhin gezeigt wurde.

§. 148.

4ter Lehrſatz. Wenn in zwey Dreyecken 2 Seiten des einen, zwey Seiten des andern proportional ſind,

und der größern Seite jedes Paares in beyden Dreyecken ein gleicher Winkel gegenüber ſteht, ſo ſind ſie ähnlich.

Fig. 29, △a∾△b, wenn AJ:Am=BA:AC, }
und der ∟v=∟w. }

Beweis.

Da hier ebenfalls bloß Stücke der beyden Erforderniſſe gegeben ſind, ſo müſſen auch beyde,

die Gleichheit der Winkel und

die Proportionalität der Seiten,

bewieſen werden.

Man trage wieder aus dem, dem ∟G, gleichnamichten Winkelpuncte A, auf den Schenkel AJ, den Schenkel GH, ſo, daß AB=GH werde; und durch B zu der Grundlinie eine Parallele BC; ſo iſt nach dem Zuſatze des §. 145, und nach §. 146, das △ABC∾△AJm. Sind dieſe Dreyecke aber einander ähnlich, ſo ſind in beyden die Winkel gleich, und ſtehen die Seiten in Proportion: auch wird ſich folgende Proportion ergeben,

ben,	AJ:Am=AB:AC.
Da nun nach der Theſis	AJ:Am=GH:GJ.
ſo iſt auch	AB:AC=GH:GJ
daraus durch Verwechslung der mittlern Glieder	AB:GH=AC:GJ
Es iſt aber	AB=GH, alſo muß
auch	AC=GJ ſeyn.

Weil nun nach der Theſ. ferner $\angle v = \angle w$

$\angle \delta = \angle w$

ſo iſt auch $\angle \delta = \angle v$.

Man hat alſo in beyden Dreyecken, ABC u. GHJ, 2 gleichliegende und gleiche Seiten; AB und GH; und AC und GJ; und einen der größern Seite gegen überliegenden gleichen Winkel; $\angle \delta = \angle v$.

Folglich ſind nach §. 121. Lehrſatz 4, dieſe Dreyecke congruent; und da für das eine derſelben die Aehnlichkeit mit $\triangle$ AJm (oder a) erwieſen worden iſt, ſo iſt ſolche auch für das andere mit erwieſen; — $\triangle$ ABC $\backsim$ $\triangle$ AJm, alſo auch

$\triangle$ GHJ (oder b) $\backsim$ $\triangle$ AJm (oder a).

§. 149.

a. **Wenn man aus der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinklichten Dreyecks, auf die, demſelben gegenüberſtehende Seite oder Hypothenuſe, einen Perpendikel fallen läßt, ſo wird dieſes Dreyeck dadurch in zwey andere Dreyecke getheilt, welche dem großen, und ſich ſelbſt untereinander ähnlich ſind.**

Fig. 27, ſoll $\triangle$ ABC $\backsim$ $\triangle$ ABD u. $\triangle$ BDC, wenn BD ſenkrecht.

Beweis.

Durch den Perpendikel CD, zerfällt das Drey-

eck ABC, in die beyden rechtwinklichten Dreyecke, ADB und BDC. Das große Dreyeck ABC und das △ ABD, haben den ∟ A gemein; folglich: da wenn 2 ∟ zweyer Dreyecke gleich ſind, auch der dritte in beyden gleich iſt, und da nach dem 1ſten Lehrſatz, 2 Dreyecke von gleichen Winkeln ähnlich ſind, ſo ſind auch dieſe beyden Dreyecke einander ähnlich. Eben ſo hat das △ ABC, und das △ BDC, den ∟ C gemein; und müſſen alſo auch dieſe (nach dem vorhergehenden) einander ähnlich ſeyn. Da nun △ ABC ∾ △ ABD,
und △ ABC ∾ △ BDC,
ſo iſt auch △ ABD ∾ △ BDC.
folglich alle dreye einander ähnlich.

1ſter Zuſatz.

Aus der Lehre von den Proportionen iſt bekannt, daß wenn die beyden mittlern Glieder einer Proportion einander gleich ſind, dann die ſie darſtellende Zahl die mittlere Proportionalzahl zwiſchen den beyden äuſern Gliedern ſey.

In 9 : 6 = 6 : 4 iſts alſo die Zahl 6. Da nun aus der erwieſenen Aehnlichkeit der Dreyecke ABD und BDC, folgt: „daß AD : BD = BD : DC; denn 2 Paar gleichnamichte Seiten, ſchließen einen gleichen (hier einen R) Winkel ein, — es entſteht alſo eine Proportion, in welcher ebenfalls die mittlern Glieder gleich BD = BD; ſo iſt BD auch die mitt-

lere Proportionallinie zwiſchen den durch BD abgeſchnittenen Stücken, AD und DC. Das heißt:

„Wenn man aus der Spitze eines rechten Winkels, auf die Hypothenuſe eine ſenkrechte Linie fällt, „ſo iſt ſolche die mittlere Proportionale zwiſchen den, durch ſie abgeſchnittenen Stücken der Hypothenuſe.

2ter Zuſatz.

Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke, ABC und BDC, läßt ſich ferner die Proportion, HC : BC = BC : DC; und aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ABC und ABD, AE : AB = AB : AD; denn in der erſten Proportion ſind gleichnamichte Seitenpaare, welche auch den gemeinſchaftlichen ∟ C und in der letztern ebenfalls, welche auch einen gemeinſchaftlichen ∟ A einſchließen. — Da nun AB und BC die beyden Catheten ſind, ſo ergiebt ſich aus obigen Proportionen

„daß jeder der beyden Catheten die mittlere „Proportionale zwiſchen der Hypothenuſe und „dem an ihm liegenden Stücke dieſer Linie, ſey; „als hier BC zwiſchen der Hypothenuſe AC „und dem Stücke DC, ſo wie AB zwiſchen AC und AD.

§. 150

Aufgaben.

1te Aufgabe. Zwiſchen 2 gegebenen Linien, eine mittlere Proportionale zu finden.

Fig. 30 zwiſchen DC und AC.

Aufloͤſung.

Man ſetze aus den beyden gegebenen Linien eine einzige zuſammen, und halbire ſolche. Aus der gefundenen Mitte reiße man mit der gefundenen Haͤlfte einen Halbkreis, und errichte bis zu ſolchem aus dem Puncte, wo jene gegebenen Linien zuſammentreffen, einen Perpendikel, ſo iſt ſolcher die geſuchte Linie.

Der fuͤr die Richtigkeit der Aufloͤſung zu fuͤhrende Beweis beruht bloß darauf, daß man zeigt: „der Perpendikel treffe in die Spitze eines rechten Winkels'“ dann iſt ſolche ſogleich nach dem 1ten Zuſatze des letzten Paragraphs erwieſen. In der Figur 30 iſt — wie der Anblick ergiebt — aus dem Mittel x der Bogen ABC, mit dem Radius halb AC, gezogen; und dieſer ſchneidet gerade auf dem Perpendikel BD, den Punct B ab; welcher nach der Bedingung des Lehrſatzes §. 149, da das Dreyeck ABC ein rechtwinklichtes ſeyn ſollte, und ∟ ABC ein R war, mit den Schenkeln AB und BC einen rechten Winkel bildet. Das △ ABC iſt alſo rechtwinklicht; folglich nach dem 2ten Zuſatze des letztern §., und wie daſelbſt gelehrt wurde, DB die mittlere Proportionale zwiſchen AD und DC.

In der Lehre vom Kreiſe, wird gezeigt werden, „daß jeder in der Peripherie eines Halb„kreiſes liegende Winkel, deſſen Schenkel auf den

Endpuncten des Durchmeſſers deſſelben Kreiſes ruhen, ein rechter Winkel ſeyn müſſe, folglich auch hier. Wenn A B und B C gezogen wird, ∟ B = R.

Der Beweis wäre dann ſo zu führen: Da der ∟ A B C als Peripherie-Winkel eines Halbkreiſes über dem Durchmeſſer ein R, folglich, wenn AB und BC gezogen, das △ ABC rechtwinklicht; ſo iſt nach dem 1ſten Zuſatze § 149 BD die mittlere Proportionale zwiſchen AD und DC; und nur dieſer Beweis iſt vollkommen geometriſch; der vorherige, wenigſtens in Rückſicht des rechten Winkels, nicht allgemein, ſondern nur für dieſes Beyſpiel richtig.

Nota. Anfänger verwechſeln oft „das Auffinden einer mittlern Proportionale zwiſchen 2 gegebenen Linien, mit dem Auffinden einer dritten Proportionale zu 2 gegebenen. Eigenes Nachdenken und die Betrachtung der Auflöſung der beyden in dieſem und dem folgenden §. entwickelten Aufgaben, werden aber den Unterſchied leicht bemerkbar machen — er wird ſelbſt durch die Worte zwiſchen und zu ſchon kenntlich.

§. 151.

2te Aufgabe. Zu 2 gegebenen Linien eine dritte Proportionale zu finden.

Fig. 31 zu A B und A C die dritte.

Auflöſung.

Man zeichne ſich irgend einen Winkel, — hier

∟ GAF — und ſetze aus deſſen Spitze die gegebenen Linien auf die Schenkel deſſelben, und ziehe deren Endpuncte zuſammen. — Nun ſetze man aus dem einen oder dem andern Endpuncte die ein oder die andere Linie ferner auf einen Schenkel, und ziehe durch den dadurch erhaltenen Punct mit der erſt gezogenen Linie eine Parallele; ſo ſchneidet ſolche auf dem andern Schenkel die geſuchte dritte Proportionale ab. In dieſem Beyſpiele der Fig. 31, iſt AB aus C nach E geſetzt: In D wird alſo das Stück BD abgeſchnitten, und die geſuchte dritte Proportionale ſeyn. Denn nach Lehrſatz §. 136 hat man — da DE ⧣ BC, die Proportion

AB AC = BD : CE; oder

AC : AB = CE : BD — da nun AB = CE
ſo kann AB für CE geſetzt werden; alſo:

AC : AB = AB : BD;

Man hat alſo in BD die 3te Proportionale, da hingegen AB nicht bloß die 3te Proportionale zu AC und BD, ſondern auch die mittlere zwiſchen AC und BD iſt. Der Unterſchied zwiſchen einer dritten und mittlern Proportionale iſt alſo dieſer, „daß jede mittlere Proportional-Linie auch die dritte zu 2en andern ſey, zwiſchen denen ſie die mittlere bilde; nicht aber iſt auch jede dritte Proportionale die mittlere zwiſchen ihren zugehörigen beyden Linien.

§. 152.

3te Aufgabe. Zu drey gegeb'enen Linien eine vierte Proportionale zu finden.

Fig. 31., zu AB, AC und CF, die vierte.

Auflöſung.

Man trage, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die beyden erſten Linien auf die Schenkel eines beliebigen Winkels ziehe durch die erhaltenen Puncte eine gerade Linie, und ſetze die 3te Linie aus irgend einem jener Puncte ebenfalls auf einen Schenkel ab. Die durch den dadurch erhaltenen Punct, zu der erſten gezogenen Linie gezogene Parallele, ſchneidet auf dem andern Schenkel die vierte geſuchte Proportionale, ab. Hier iſt alſo AB und AC, nach B und C, geſetzt, und BC gezogen. Ferner aus C die dritte gegebene Linie CF, nach F geſetzt, und mit BC die Parallele GF, gezogen; alſo würde BG die geſuchte vierte Proportionale ſeyn; welches nach der vorhergehenden Aufgabe, mit Berückſichtigung des §. 136., „daß wenn BC # mit GF, dann AC : AB = CF : BG, ſich ohne weitern Beweis ergiebt.

§. 153.

4te Aufgabe. Eine gegebene Linie in ſolche Theile einzutheilen, welche untereinander daſſelbe Verhältniß haben, als die gegebenen Theile einer andern gegebenen Linie unter ſich haben.

Fig. 32. ſey AB zu theilen; AC die 2te gegebene Linie, auf welcher die gegebenen Theile, AD, DE, EC.

Auflöſung.

Für die hier Fig. 32. gegebenen Data, errichte man über AC ein gleichſeitiges Dreyeck. Setze die Linie AB, aus H, nach F und G, ab; und ziehe durch die Puncte oder Theile, D und E, die Linie HD und HE, ſo werden die auf FG abgeſchnittenen Theile, FJ:JK:KG = AD:DE:EC ſich verhalten, und durch ſolche AB, welche gleich FG, auf die verlangte Art getheilt ſeyn. Daß AB = FG, können ſich Anfänger aus Folgendem überzeugen. Da nemlich AH=CH, und FH=GH; ſo bilden AH und HC, und FH und GH, zwey gleiche Verhältniſſe, deren Exponent = 1; und man erhält AH : CH = FH : GH. Verhalten ſich aber die ganzen Seiten wie die durch eine Linie oberhalb abgeſchnittene Stücke, ſo iſt dieſe Linie mit der Grundlinie nach §. 141. parallel; alſo FG ⧣ AC. Iſt dieſes aber, ſo iſt auch ∟A

$= \angle F$; $\angle C = \angle G$, und $\angle H$ iſt einleuchtend den beyden Dreyecken AHC und FHG, gemeinſchaftlich; im gleichſeitigen Dreyecke AHC ſind aber nach §. 122. Lehrſatz a, alle Winkel gleich; da nun die Winkel des einen Dreyecks, den gleichliegenden Winkeln des andern gleich ſind, und eben nach §. 122. auch gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen, ſo iſt $FH = FG$, und da $FH = AB$ genommen wurde, alſo auch $AB = FG$.

Der Beweis, daß $FJ : JK : KG = AD : DE : EC$ iſt ſehr leicht zu führen. Denn nach Zuſatz §. 145. ſind die Dreyecke FAJ und AHD, oder Δ 1. und Δ 2, einander ähnlich eben ſo $\Delta 3 \sim \Delta 4$, und $\Delta 5 \sim \Delta 6$; woraus ſich ergiebt:

$HJ:HD = FJ:AD$
$HJ:HD = JK:DE$, alſo
$FJ:AD = JK:DE$; und durch Verwechslung der mittlern Glieder
$FJ:JK = AD:DE$.

$HK:HE = JK:DE$.
Ferner $HK:HE = KG:EC$; alſo
$K:DE = KG:EC$.
oder $JK:KG = DE:EC$.

Folglich auch $FJ : JK : KG = AD : DE : EC$; und der Satz erwieſen.

Wäre das Verhältniß der Theile zu einander, in welche AB eingetheilt werden ſollte, in Zahlen angegeben, z. E. ſollten ſie ſich, wie 4 : 6 : 3 verhalten; ſo macht man AC ſo viele Theile lang, als die Summe dieſer Zahlen ergiebt; hier alſo 13 Theile; zieht wie vorhin FG, und durch die Puncte der Verhältnißtheile, die Linien in die Spitze des

Winkels, wie vorhin. Wäre AD = 4 Theilen, DE = 6 Theilen, ſo zöge man alſo aus D und E nach H.

Aufgabe und Auflöſung ſind alſo ganz dieſelben, wie die bewieſene, und iſt deshalb der Beweis für die letztere, in jener mitgegeben.

§. 154.

5te Aufgabe. Zu einem gegebenen Dreyecke ein ähnliches zu zeichnen.

Fig. 29.

Auflöſung.

Um ein ähnliches Dreyeck zeichnen zu können, braucht man nur auf die §. 144. angegebenen Erforderniſſe, welche die Aehnlichkeit der Dreyecke verlangt, zurückzublicken; ſo werden ſich die verſchiedenen Verzeichnungsarten leicht entwickeln laſſen; ſie ſind folgende.

Aehnliche Dreyecke können verzeichnet werden:

a. Durch 2 gleiche und gleichnamichte Winkel (welche in beyden △ einander gleich ſind) oder

b. Durch 1 gleichen und gleichnamichten Winkel und 2 denſelben einſchließende proportionale Seiten; oder

c) Wenn man zu den 3 Seiten des gegebenen Dreyecks, 3 proportionale Seiten ſucht,

und mit ſolchen das ähnlich ſeyn ſollende Dreyeck, verzeichnet.

Ad. a.

Man zeichne an eine beliebige Linie 2 Winkel, welche an irgend einer Seite des gegebenen Dreyecks liegen; ſo werden die Schenkel derſelben, ſogleich das Dreyeck beſtimmen. — Für dieſe Fig 29. ziehe man alſo z.E. GH, von willkührlicher Länge, und ſetze an ſolche 2 ∠, welche zweyen des gegebenen ∠ ABC, gleich ſind; ∠ x = ∠ y, und ∠ v = ∠ δ. — Man hätte eben ſo gut ∠ δ und ∠ α, oder ∠ α und ∠ y, an GH, ſetzen können, das △ würde dennoch ähnlich geworden ſeyn.

Ad b. Fig. 33.

Man zeichne zu irgend einem Winkel des gegebenen Dreyecks, einen gleichen Winkel mit Schenkeln von beliebiger Länge. — Hier zum △ A mit ax und ay den gleichen ∠ xay oder ∠ a. Da aber proportionale Seitenpaare der beyden Dreyecke den gleichen Winkel einſchließen müſſen, — verglichen mit §. 132. und §. 144. — ſo muß man die fehlenden oder proportionalen Seiten zu erhalten ſuchen, und ſolche auf den Schenkeln ax und ay, aus a, abſtecken.

Es braucht aber nur noch eine 4te Proportionale gefunden zu werden, da die 3te willkürlich groß

angenommen werden kann; wenn nur die zu findende 4te, mit dieſer 3ten ein gleiches Verhältniß bildet als die 2te mit der 1ſten; das heißt, ſo wie die gegebenen AG und AB, ſo die willkürlich angenommene, (ſie heiße ab) zu der 4ten (ſie heiße ac) alſo ab : ac. — Dieſes giebt die Proportion AG AF = ab : ac. Alſo ſind die 3 Linien AG, AF, ab gegeben, und ac zu finden, welches nach §. 152. geſchieht; — aus a auf ax und ay, ſetze man AG und AF, und ziehe die Endpunkte zuſammen, d. i FG; und da in der Proportion AG : AF = ab : ac, AG und ab Vorderglieder ſind, ſo muß einleuchtend ab auch auf den Schenkel von AG, getragen werden, — aus a nach b. Durch b nun mit FG eine Parallele gezogen bc, ſo iſt △abc ∾ △AGF.

Ad c.

Da hier bloß durch proportionale Seiten gezeichnet werden kann, ſo müſſen ſolche aufgeſucht werden. Eine Seite — ſie ſey ab — nehme man nach Belieben; allein zwey — ſie ſollen ac und bc heißen — ſind zu ſuchen. Zu AG, AF und ab, ferner zu AG, GF und ab, alſo die 4te Proportionale; aus den dadurch erhaltenen 3 Seiten, ab, ac, bc, wird nun ein, dem △AGF ähnliches, gezeichnet werden können.

§. 155.

6te Aufgabe. Zu einer gegebenen Figur eine ähnliche zu zeichnen.

— Zu Fig 25. —

1ſte Auflöſung.

Man zerfälle die ganze Figur in Dreyecke, und zeichne zuerſt zu einem beliebigen dieſer Dreyecke ein ähnliches, über, unter, oder an daſſelbe, dann ein ähnliches und ähnlich liegendes 2tes, der gegebenen Figur; dann das ähnlich liegende 3te u. ſ. w. Hier zeichne man, Fig. 26, zuerſt △ 1 ∾ △ 1. Fig. 25; dann über lı g das △ 2 ∾ △ 2; über h i △ 5 ∾ △ 3. Sind aber die Dreyecke beyder Figuren ähnlich, ſo ſind die Figuren ſelbſt ähnlich. — Denn ſind alle Theile ähnlich, ſo müſſen auch die Ganzen ſelbſt ähnlich ſeyn.

2te Auflöſung. Fig. 34.

Man nehme irgend einen Punkt innerhalb der gegebenen Figur an, und ziehe von ſolchem in alle Ecken derſelben, Linien, ſo wird ſolche dadurch in Dreyecke zerlegt. Nun zeichne man auf dieſelbe Art, wie in der 1ſten Auflöſung, zu ſolchen ähnliche und ähnlich liegende Dreyecke: ſo wird die gezeichnete Figur der gegebenen ähnlich ſeyn. Alſo hier, aus dem Punkte C, nach A B D E, — zeichne zu △ A C E, das ähnliche △ a c e, und dann, (wie ſchon bekannt)

die übrigen ähnlichen und ähnlich liegenden. Sind dieſe 2 Figuren aber ähnlich, ſo heißen die Punkte C und c, ähnlich liegende Punkte; von c wird die Figur in ſolche ähnliche Dreyecke, als von C aus, getheilt; das heißt △CAE∾△cae; △CAB∾△cab, △CBD∾△cbd ꝛc.

3te Aufloſung. Fig. 35.

Man nehme in der gegebenen Fig. 2, 3... Punkte an; verbinde ſolche durch eine gerade Linie, und ziehe von jedem derſelben in jede Ecke Linien; ſo wird man die ganze Figur durch Dreyecke, welche mit einander in Verbindung ſtehn, beſtimmt finden. Zeichnet man nun zuerſt ein Dreyeck, welches irgend einem von dieſem ähnlich iſt, und zu ſolchem dann ſämmtliche übrige ähnlich liegende △; ſo wird man eine der gegebenen ähnliche Figur erhalten. Fig. 35, ſind E und F, die angenommenen Punkte; und e u. f, die durch Verzeichnung der ähnlichen Dreyecke ced∾CED, und cfd∾CFD, erhaltenen ähnlich liegenden Punkte. Die Zeichnung ergiebt das weitere, wie die übrigen ähnlichen und ähnlich liegenden Dreyecke, hinzugefügt ſind und die ganze Figur Stückweiſe der gegebenen ähnlich gebildet worden iſt.

Iſt aber die Figur ABCD∾abcd, „ſo ver„hält ſich die Entfernung der Puncte E und F u. e und f oder EF, ef, zu einer der gleichliegenden Seiten „ihrer Figur eben ſo in der einen Figur, wie in der andern — das heißt z. B. EF:CD=ef:cd.

Der nach Wahrheit forſchende Anfänger, wird dieſes aber nicht gern auf guten Glauben ohne Beweis annehmen, ſondern ſich davon zu überzeugen wünſchen. Er betrachtet dieſe aufgeſtellte Proportion, und findet, daß die Proportionalität zweyer Linienpaare bewieſen werden müſſe; und ein Blick auf die beyden Figuren, läßt ihn ſogleich bemerken, daß dieſe Linien, die Seiten 2er Dreyecke ſind, welche die 3te Seite (in jeder Figur) gemeinſchaftlich haben; und da überdieß dieſe Dreyecke ähnlich und ähnlich liegende ſind, ſo ahndet er gewiß ſchon, daß ſich aus der Proportionalität der gleichnamichten Seiten derſelben, der Beweis abſtrahiren laſſe.

Er verſucht aus gleichnamichten Seitenpaaren, Proportionen zu bilden, in welchen jene Linien, Glieder der Verhältniſſe ſind und erhält EF : ED = ef : ed; ferner ED : CD = ed : cd. Aus dieſen beyden Proportionen ſucht er eine einzige herzuleiten, in welcher die zu beweiſende, der Theſis, enthalten iſt; er verwechſelt die mittlern Glieder, und es ergiebt ſich, EF : ef = ED : ed; und ED : ed = CD : cd; alſo wegen der gleichen Verhältniſſe in beyden Proportionen, ED : ed = EF : ef = CD : cd, und durch fernere Verwechslung der mittlern Glieder EF : CD = ef : cd; — die Theſis alſo richtig.

Anmerkung.

Auf dieſer 5ten und 6ten Aufgabe des § 155 und 156, beruht die Vergrößerung oder Verkleinerung (Verjüngung) aller geometriſchen Zeich-

nungen; daher müſſen ſich Anfänger mit ſolchen vollkommen bekannt machen. Beſonders wichtig iſt die 3te Auflöſung der 2ten Aufgabe, und empfehle ich dieſelbe daher beſtens. Zugleich ſchließe ich hiermit die Lehre von der Aehnlichkeit der geradlinichten Figuren, welche — wie ich ſchon geäußert habe — mit der Lehre von der Congruenz, die wichtigſte in der ganzen Geometrie iſt. Nur durch ſie, durch Kenntniß und Anwendung ihrer Grundſätze, kann der practiſche Geometer mit außerordentlicher Bequemlichkeit und Zuverläſſigkeit arbeiten.

Ohne die hier vorgetragene Lehren ſich vollkommen zu eigen gemacht zu haben, wird man in der ausübenden Geometrie, häufigen Anſtoß finden.

c. Vergleichung des Flächeninhalts der Parallelogramme und Dreyecke.

§. 156.

1ſter Lehrſatz. Wenn 2 Parallelogramme gleiche Grundlinien und Höhen haben, ſo ſind ſolche gleich groß.

Fig 36 ſoll cdef = abcd, wenn cd die gemeinſchaftliche Grundlinie, und bd die gemeinſchaftliche Höhe.

Beweis.

Es iſt ef = cd, und ab = cd; alſo ef = ab; und daher auch ef + fa = ab + fa. Das heißt,

ae = bf. Ferner ec = fd, und ac = bd. Da alſo in den Dreyecken ace und bdf, alle 3 Seiten gleich ſind, ſo ſind auch beyde Dreyecke einander gleich, ja nach dem 2ten Lehrſatze der Congruenz pag. 216., ſelbſt congruent.

Das $\triangle$ ace — agf = $\triangle$ bdf — agf, bildet 2 gleiche Trapeze, das Trapez fgec = agbd. Da nun dieſe beyden Vierecke durch ein und daſſelbe Dreyeck gcd, zu Parallelogrammen ergänzt werden, — denn fgec + gcd = cdef;

und agbd + gcd = abcd —

ſo ſind die durch dieſe Ergänzung ſich bildenden Parallelogramme, ſich gleich; cdef = abcd; wie die Theſis verlangt.

Anmerkung.

Um die Höhen überhängender Dreyecke und Parallelogramms, zu beſtimmen, z. B. die des $\triangle$ ecd und Parallelogramms cdef, ſo braucht man nur die Grundlinie ſo weit zu verlängern, daß ein aus e gefällter Perpendikel noch auf ſolche treffe; ſeine Länge iſt die geſuchte Höhe. Da hier ac und bd, ſenkrecht auf cd ſtanden, ſo waren ſolche ſogleich die Höhe der beyden Parallelogramme, wäre dieſes nicht geweſen, ſo hätte man die Höhe auf die ſo eben angegebene Art — wie ſolche für das Dreyeck ecd durch eh beſtimmt iſt, ſuchen müſſen.

§. 157.

2ter Lehrſatz. Zwey Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe ſind einander gleich. Fig. 36 △ ecd = △ bcd.

Beweis.

Die Diagonal bc theilt das Parallelogramm abcd in 2 Theile, und eben ſo auch ed das Parallelogramm cdef. Da bc den Dreyecken bcd und acb gemeinſchaftlich iſt, und ab = cd, ac = bd, ſo ſind alle drey Seiten des einen dieſer Dreyecke gleich den 3 Seiten des andern; folglich ſind die Dreyecke congruent und alſo auch gleich. Eben ſo läßt ſich beweiſen, daß △ edc = △ fdc; und aus beyden Beweiſen fließt die Folge, „daß △ ecd und △ bcd Hälften ihrer Parallelogrammen ſind; beyde Dreyecke haben aber auch gleiche Grundlinie und Höhe, da cd = cd und eh = bd.

Zuſatz.

Ein Dreyeck iſt alſo, wie ſchon Zuſatz §. 114 vorläufig geſagt worden, „die Hälfte von „einem Parallelogramm, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat;“ und umgekehrt, „ein Parallelogramm doppelt ſo groß als ein „Dreyeck von gleicher Grundlinie und Höhe.

§. 158.

3ter Lehrſatz. Parallogramme von gleicher Höhe aber verſchiedenen Grundlinien verhalten ſich wie dieſe Grundlinien zu einander.

Fig. 37. Wenn ac = bd, ſo verhält ſich abcd : afce = af : ab.

Beweis.

Theilt man die Grundlinie des Parallelogramms a b c d, nehmlich a b, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und zieht mit bd Parallelen durch ſolche Theilpunkte; ſo entſtehn ſo viel gleiche Stücke, als a b Theile hat. — Hier alſo 6 — Fällt ein Theilpunkt von a b gerade in den Endpunkt der Grundlinie des 2ten Parallelogrammes, wie hier in f, ſo leuchtet ſo fort ein, daß ſich dieſe Parallelogramme in Rückſicht ihres Flächengehalts wie ihre Grundlinien verhalten; denn a f c e, beſteht aus 2 ſolchen Stücken, als a b c d 6 zählt; die Flächenſtücke alſo, wie 2:6; und da a f ebenfalls 2 ſolcher Theile hat, als a b, 6, folglich die Linien auch wie 2 : 6; ſo iſt die Theſis, abcd : afce = ab : af richtig.

Könnte man durchaus kein Maß finden, welches a b dergeſtalt theilte, daß ein Theilpunkt in f fiele, ſo iſt und bleibt demohngeachtet dieſe Pro-

portion richtig. Denn da das Parallelogramm a b c d, wenn a b in gewiſſe gleiche Theile getheilt wird, nicht mehr und nicht weniger gleiche Stücke enthalten kann, als die, durch die Theil-puncte von a b mit b d gezogenen Parallelen, bilden; und ein Stück eines ſolchen Theils von a b alſo auch nur einen Bruchtheil eines, über einen ganzen Theil von a b ſtehenden Flächenſtücks, durch eine, durch deſſen Punct gehende Parallele bilden läßt; — wie e f dann bilden würde, wenn in f kein Theilpunct von a b fiele — ſo wird ſich auch die Summe aller dieſer in a b c d enthaltenen Stücke zu der Summe der in a f e c enthaltenen Stücke und etwaigen Bruchtheile verhalten, wie a b : a f.

Zuſatz.

Da Dreyecke die Hälfte von Parallelogrammen ſind, welche gleiche Grundlinie und Höhe mit ihnen haben; ſo gilt dieſer 3te Lehrſatz für die Dreyecke; das iſt: „auch Dreyecke von gleichen Höhen „verhalten ſich wie ihre Grundlinien.

§. 159.

4ter Lehrſatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie aber verſchiedenen Höhen, verhalten ſich wie dieſe ihre Höhen.

Fig. 38, a b d e : l g m h = e f : k h, wenn a d = g h.

Beweis.

Man laſſe aus b und e Perpendikel fallen, ſo

entſteht das Parallelogramm bcef=abed; denn Grundlinie und Höhe, ſind in beyden gleich. — Es war ja be=ad=gh, und be iſt jetzt auch =cf; alſo auch cf=ad=gh; und ef und bc war auch die Höhe von abef. — Da aber in jedem rechtwinklichten Parallelogramme, ſtets diejenigen beyden Seiten, welche mit einander einen R bilden, ſenkrecht auf einander ſtehn, wenn eine derſelben für horizontal angenommen wird; ſo iſt es bey ſolchen rechtwinklichten Pargr. (ſoll künftig zur Abkürzung ſtatt Parallelogramm gebraucht werden) einerley, welche Seite man zur Grundlinie wählt. Man kann alſo im Prgrm. bcef, auch Statt cf die Linie ef oder bc, zur Grundlinie annehmen; und da ſich das Ganze, bisher für Pargr. abed Geſagte, auch für Pargr. lgmh=igkh beweiſen läßt, alſo auch Pargr. igkh und lgmh, (es iſt bloß eine Verwandlung der ſchiefwinklichten Pargramme in gleich große rechtwinklichte geſchehen) ſo kann man auch im Prgr. igkh, Statt gh, kh nehmen; cf und gh als vormalige gleiche Grundlinien, ſind nun zu gleichen Höhen angenommen, und dadurch auch der 3te Lehrſatz für den Gegenſtand dieſes 4ten, anwendbar geworden; das heißt: bcef:igkh=ef:kh.

Zuſatz.

Aus dieſem Vorhergehenden läßt ſich nun leicht ſchließen: daß

1. Zwey rechtwinklichte Parallelogramme, welche

eine gleiche Seite haben, ſich zu einander verhalten, wie ihre ungleichen Seiten. — Wie vorhin ef und kh. —

2. Ein rechtwinklichtes und ein ſchiefwinklichtes Parallelogramm, ſind gleich, wenn beyde gleiche Grundlinien und Höhe haben. — Wie vorhin bcef = abde.

3. Da Dreyecke die Hälfte von Parallelogrammen ſind, welche mit ihnen gleiche Grundlinien und Höhe haben; ſo gilt auch der vorſtehende Lehrſatz für Dreyecke, welche gleiche Grundlinien aber verſchiedene Höhen haben.

§. 160.

5ter Lehrſatz. Zwey Parallelogramme von verſchiedener Grundlinie und verſchiedener Höhe, verhalten ſich in Rückſicht ihres Flächengehalts gegen einander, wie die Productenzahlen, welche entſtehen, wenn die Grundlinie und Höhe, in beyden in einander multiplicirt wird; oder, wie die Producte aus ihren Grundlinien in ihre Höhen

Fig. 39. Pargr. abcd : begf = ac:ab : gb:be.

Beweis.

Man theile beyde Parallelogramme, wie Fig.

39, in gleich große Quadrate, ſo werden a c und a b, ſo wie g b und b e (die Höhen und Grundlinien in ſolchen) in gleich große Theile dadurch getheilt werden; nemlich a c in 9, a b in 6, g b in 6 und b e in 4 Theile.

Es verhält ſich alſo a c : a b = 9 : 6 }
g b : b e = 6 : 4 } und ſind daher

9 und 6 und 6 und 4, hier die Zahlen, welche die Grundlinien und Höhen ausdrücken; alſo

a c.a b = 9.6 = 54, und }
g b.b e = 6.4 = 24. } der Flächengehalt

beyder Parallelogramme, würde ſich folglich wie 54 : 24 verhalten; a b c d : b e g f = 54 : 24. Das heißt; wenn das Parallelogramm a b c d, 54 Theile von einer gewiſſen Größe hätte, ſo würde b e g f von eben ſolchen Theilen 24 Stücke haben. Zählt man die Quadrate in beyden Pargr. für jedes zuſammen, ſo wird b e g f auch richtig 24, und a b c d 54 Stück enthalten. Das Verhältniß 54 : 24, kann auch nach der Nota, pag. 86, verkleinert dargeſtellt werden; nemlich durch 24 gehoben, in $2\frac{1}{4}$: 1; alſo muß b e g f, $2\frac{1}{4}$ mal in a b c d enthalten ſeyn. — Auch dieſes wird man beſtätiget finden, denn a i h m zählt 1 mal ſo viel Stücke als b e g f; und h g m b + i g k l wieder zuſammen 24, alſo hat man ſolche ſchon 2 mal; k c d l hält deren 6, alſo $\frac{1}{4}$ von 24 oder von b e g f; folglich,

a b c d = a i h m + h g m d + i g k l + k c d l, iſt $2\frac{1}{4}$ mal ſo groß groß als b e g f.

Zuſatz.

Auch dieſer Lehrſatz gilt für die Dreyecke zugleich mit. Da Fig. 39. △abd die Hälfte vom Pargr. abcd iſt, und △bef vom Pargr. begf; ſo muß da vorhin abcd 54, und begf 24 Quadrate zählte △abd; $\frac{54}{2}=27$, und △bef, $\frac{24}{2}=12$ derſelben enthalten. Soll aber alles das, was für die Ganzen gilt, auch für ihre Theile gelten: ſo muß, weil begf $2\frac{1}{4}$ mal in abcd enthalten war, auch die Hälfte von begf $2\frac{1}{4}$ mal in der Hälfte von abcd, alſo das △bef $2\frac{1}{4}$ mal im △abd, alſo 12 in 27, $2\frac{1}{4}$ mal enthalten ſeyn; welches auch richtig iſt.

§. 161.

6ter Lehrſatz. Aehnliche Dreyecke verhalten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamichten Seiten.

Fig. 39 △hdg : △adb = $dg^2 : db^2$

Beweis.

Auf ab ſtehe db ſenkrecht, ſo iſt dg die Höhe des △hdg, und db die Höhe des △adb. Da nun nach §. 140 (durch die Verwechslung der mittlern Glieder ꝛc.) hg : ab = dg : db; ſo verhalten ſich in dieſen beyden ähnlichen, ſo wie in allen un-

ter einander ähnlichen Dreyecken die **Höhen** wie die **Grundlinien**, und umgekehrt.

Nach Zuſatz §. 160, ferner $\triangle$ hdg : $\triangle$adb = hg.dg:ab.db — das iſt, die Dreyecke wie die Producte aus den Grundlinien in die Höhen; vide §. 160 — Wird im letzten Verhältniſſe für hg, dg; und für ab, db geſetzt: ſo ergiebt ſich dg.dg:db.db oder $dg^2 : db^2$; iſt dieſes aber bewieſen, ſo iſts auch die Theſis; denn man hat nun $\triangle$ hdg:$\triangle$adb = $dg^2 : db^2$.

Daß aber dg und db Statt hg und ab geſetzt werden können, leuchtet nach der Proportionslehre ein: alle vier Größen ſind proportionale Größen, welche durch Multiplication und Diviſion aus einander entſtanden ſind; folglich können die gleichnamichten Glieder ohne die **Gleichheit** der Verhältniſſe dadurch aufzuheben, ausgetauſcht werden. Denn hg ſey = 1, ab = 3, dg = 2, und db = 6,

ſo hat man hg : ab = dg : db } und durch jene
1 : 3 = 2 : 6 } Subſtituirung
dg für hg und db für ab, dg:db = dg : db }
2 : 6 = 2 : 6 }

Oder nach §. 34, 2; 1 : 3 = 2:6, wie vorhin

Man kann ſich auch auf eine arithmetiſche Art von der Richtigkeit dieſes Lehrſatzes überzeugen, wenn man Fig. 39, in Rückſicht der Eintheilung durch die kleinern Quadrate, betrachtet. Hiernach hat das Pargr. hndg 6 Quadrate, alſo $\triangle$ hdg 3; und Pargr. abcd 54, alſo $\triangle$ abd die Hälfte

27; nun ſoll ſich $\triangle$ adg:abd, alſo 3:27 verhalten wie $dg^2:db^2$; das Quadrat von dg zählt aber 9, und das Quadrat von db, würde in 9 Streifen, jeder zu 9 Quadraten, 81 zählen; 3 iſt aber ſo oft in 27 enthalten, als 9 in 81; alſo auch

$$\triangle hdg : \triangle abd = dg^2 : db^2$$
$$3 : 27 = 9 : 81$$
$$\text{oder } 1 : 9 = 1 : 9$$

1 Zuſatz.

Da Dreyecke die Hälften derjenigen Parallelogramme ſind, welche mit ihnen gleiche Grundlinie und Höhe haben, ſo gilt auch dieſer Lehrſatz von den Parallelogrammen; das heißt: „ähnliche Parallelogramme verhalten ſich wie die Quadrate der „gleichnamichten Seiten."

2ter Zuſatz.

Da jede gradlinichte Figur in Dreyecke zerlegt werden kann, und zwey ähnliche Figuren, auch in ihren Theilen, „den ähnlich liegenden Dreyecken," ähnlich ſind; ſo gilt auch das, was jetzt von ähnlichen Dreyecken bewieſen iſt, von den ähnlichen Figuren ſelbſt, welches ſich leicht beweiſen läßt. Alſo auch „ähnliche Figuren verhalten ſich, wie die Quadrate ihrer gleichnamichten Seiten. Dieſer Satz iſt, beſonders in Rückſicht des Vergrößerns oder Verkleinerens der geometriſchen Zeichnungen wichtig. Wollte man z. B. eine Figur 4mal größer oder 4 mal kleiner zeichnen; ſo müßte man, im

erſten Falle, wenn durch Dreyecke gezeichnet werden ſollte, eine Seite der gegebenen Figur nicht 4mal größer nehmen; man erhielte ſonſt, wenn die Seite 4 Fuß mäße, eine 16 mal größere Figur; ſondern nur ſo groß, als die Wurzel aus dem Producte der Quadratzahl dieſer gegebenen Seiten mit 4. Folglich zu 4 Fuß, $4^2=16$, und $4.16=64$, $\sqrt{64}=8$, daher 4, nur 2 mal größer. Im

letzten Falle zur Verkleinerung, aber eine Seite, welche ſo groß als die Wurzel aus dieſer Seite; hier alſo $\sqrt{4} = 2$, nur halb ſo klein.

Anmerkung.

In der Folge ſoll jederzeit ein q Statt der Zahl 2, zur Andeutung des Quadrats geſetzt werden; alſo Statt AC^2, AC^q ꝛc.

§. 162

7ter Lehrſatz. In einem rechtwinklichten Dreyecke iſt das Quadrat der Hypothenuſe ſo groß, als die Quadrate beyder Catheten zuſammen genommen.

Fig. 40 $A^q = AB^q + BC^q$.

Auflöſung.

Durch die ſenkrechte BD, ABD, BDC und

ABC, ähnliche Dreyecke unter ſich — §. 149; folglich verhalten ſich dieſelben nach Zuſatz §. 161 wie die Quadrate ihrer Hypothenuſen, — weil ſolche gleichnamichte Seiten ſind.

Alſo △ ABD : △ BDC : ABC = AB^q : BC^q : AC^q;

oder △ ABD : AB^q = BCD : BC^q = ABC : AC^q;
* * *

denn da ABD : BDC = AB^q : BC^q, nach Zuſatz §. 161. ſo erhält man durch Verwechslung der mittlern Glieder, die Verhältniſſe ABD : AB^q = BDC : BC^q;

ferner da

ABD:BDC=AB^q:BC^q und ABD:ABC=AB^q:AC^q,
ſo ergiebt ſich durch Verwechslung der mittl. Gl.
ABD:AB^q=BDC:BC^q und ABD:AB^q=ABC:AC^q;

alſo wegen gleicher Verhältniſſe,

BDC : BC^q = ABC : AC^q; folglich ſind alle 3 Verhältniſſe * * * einander gleich.

So wie man nun 3 gleiche Zahlenverhältniſſe durch Addiren der gleichnamichten Glieder zweyer ſolcher Verhältniſſe, auf 2 Verhältniſſe bringen kann, welche noch ebenfalls gleiche Exponenten haben; ſo kann man ſolches auch bey dieſen in Buchſtaben ausgedrückten Linienverhältniſſen, und aus denen nun erhaltenen 2 gleichen Verhältniſſen, eine Proportion bilden. Man hätte z. E.

1 : 2 = 3 : 6 = 4 : 8; oder,

60000 : 250000 = 33746 : 140610 = 93746 : 390610, } †
ABD : AB^q = BDC : BC^q = ABC : AC^q }

und man addirte die gleichnamichten Glieder der bey-den erſten Verhältniſſe, ſo ergäbe ſich,

$$\left.\begin{array}{l} 1+3:2+6=4:8 \\ 4\ :\ 8\ =4:8 \end{array}\right\}\text{ und}$$

$$\left.\begin{array}{l} ABD+BDC : AB^q + BC^q = ABC : AC^q \\ \underbrace{60000+33746}:\underbrace{250000+140610}=93746:390610 \\ \quad 90746 \quad : \quad 390610 \quad =93746:390610 \end{array}\right\}\dagger$$

Eben ſo kann man aus den beyden erſten Linien-Verhältniſſen * *, wie auch aus † † einleuchtet, ein einziges bilden, und zwar ein ſolches, welches dem dritten * wieder gleich iſt; aus beyden aber die Proportion, $ABD + BDC : AB^q + BC^q = ABC : AC^q$. Da nun die Theile zuſammengenommen, dem Ganzen gleich ſind, alſo auch $ABD + BDC = ABC$, ſo muß auch die Summe der Quadrate der Hypothenuſen dieſer Theile, gleich ſeyn dem Quadrate der Hypothenuſe des Ganzen; das iſt, $AB^q + BC^q = AC^q$; wie ſich ſolches auch ſelbſt arithmetiſch anſchaulich ergiebt, wenn man zu obigen Zahlenverhältniß-Gliedern, welche genau aus wirklich angeſtellten Berechnungen des R L Dreyecks ABC genommen ſind, die Buchſtaben hinzuſchreibt; wie bey † † geſchehen iſt. Eben ſo kann man ſich durch Eintheilung der Quadrate in gleich große Theile, davon überzeugen. Wenn AB in 4 gleiche Theile getheilt wird, ſo hat in dieſem Dreyecke BC, 3 ſolcher Theile und A , 5; trägt man einen ſolchen Theil auch auf die ſenkrechten Seiten der Quadrate fort, und zieht durch dieſe und die Theilpuncte auf

den Hypothenuſen die gehörigen Parallellinien, wie xy und vz; ſo werden ſich lauter gleiche Quadrätchen abſchneiden; und zwar im AB^q 16, im BC^q 9, im AC^q 25; 16 + 9 iſt aber auch = 25.

Dieſer Lehrſatz iſt von einem großen griechiſchen Mathematiker, Pythagoras, welcher 590 Jahr vor Chriſti Geburt lebte, erfunden; der Erfinder brachte ſeinen Göttern deshalb ein großes Dank-Opfer. Man nennt dieſen Satz daher den Pythagoräiſchen Lehrſatz, und wegen ſeines großen Nutzens in der Mathematik, auch „den Magiſter Matheſeos.

Zuſatz.

Sind alſo 2 Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks bekannt, ſo kann man die 3te durch Rechnung finden. Z. B. zu der gegebenen Cathete 3, und Hypotenuſe 5, die 2te Cathete 5.5 = 25, und 3.3 = 9, 25 − 9 = 16, und $\sqrt{16} = 4$; alſo 4, iſt die 2te Cathete.

d. Vom Kreiſe und Vielecken.

§. 163.

Erklärung.

Werden mehrere Kreiſe aus einem und demſelben Centro gezogen, ſo laufen ſolche mit einander parallel, und das zwiſchen denſelben liegende Stück,

heiſt Ring oder Kranz, und ſie ſelbſt heißen concentriſche Linien, zum Unterſchiede von den außerhalb des Centrums oder aus mehreren Centris gezogenen, welche excentriſche genannt werden.

Erſter Lehrſatz. Eine aus dem Centro auf die Mitte einer Sehne gezogene grade Linie, ſteht auf ſolcher ſenkrecht, und halbirt den Bogen, welchen die Sehne abſchneidet. — Fig. 18.

Beweis.

Da alle Radien deſſelben Kreiſes einander gleich ſind, ſo iſt △ abc gleichſchenklicht; und alſo nach §. 125. iſt cd ſenkrecht auf ab, und verlängert bis e, halbirt ſolche den Bogen von ab, in e; verglichen mit §. 126. 2te und 3te Aufgabe.

Da auch nur eine ſenkrechte auf der Mitte der Sehne ſtehn kann, ſo muß auch ein daſelbſt errichteter Perpendikel, durch das Centrum gehn.

Aufgabe.

Durch drey gegebene Puncte einen Kreis beſchreiben. Fig. 41. durch a, b, c.

Aufloſung.

Man ziehe die 3 Puncte durch grade Linien zuſammen, und errichte aus der Mitte derſelben, Perpendikel; der Durchſchnittspunct iſt das Centrum,

aus welchem man, die Linie bis in einen der Puncte zum Radius angenommen, die Kreislinie durch alle 3 Puncte, wird ziehen können.

Der Beweis iſt leicht, da ab und bc Sehnen ſind, und die Linie dx und dy als Perpendikel ſenkrecht, und zwar auf der Mitte der Sehne ſtehn.

Dieſe Auflöſung lehrt zugleich, „zu einem bloßen Cirkelſtücke, das Centrum wieder zu finden, aus welchem ſolches gezogen iſt. Man wählt nemlich auf ſolchem 3 Puncte, zieht durch ſolche Linien, welche Sehnen werden, und durch die Mitte derſelben Perpendikel, wie vorhin.

§. 164.

Zweyter Lehrſatz. Die Bogen eines und deſſelben Kreiſes, verhalten ſich (wachſen oder nehmen ab), wie die zwiſchen ihren Radien liegende Winkel.

Fig. 42. der Bogen fb : dfb = fcb : dcf.

Beweis.

Man theile den Bogen dfb in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch deren Puncte Linien zum Centro; ſo wird man finden, daß die Bogen ſo viele Theile zählen, als die

zwiſchen ihnen liegenden Winkel. Der Bogen fb, hat 4 Theile wie ſein ∟ fcb, und der Bogen dfb, hat auch 8 Theile, wie ſein ∟ dcb; alſo verhalten ſich die Bogen zu einander, und wachſen oder nehmen ab, wie die Winkel;

fb : dfb = fcb : dcf }
4 : 8 = 4 : 8. } dem doppelten Bogen

ſteht alſo der doppelte Winkel gegenüber ꝛc.

Aus dieſen Gründen „bezeichnet man die Winkel durch die zwiſchen ihren Schenkeln liegende Bögen.“ Zwey im Centro ſich ſenkrecht ſchneidende Linien, wie ab, dg, ſchneiden alſo, (da ſolche nach §. 117. 4 R ∟ bilden, und alle R ∟ nach §. 114. gleich ſind, ferner gleiche Winkel nach dieſem zweyteu Lehrſatze, gleiche Bögen haben,) auch 4 gleiche Bögen ab. Die Kreislinie wird alſo dadurch in 4 gleiche Theile getheilt. Jeden dieſer Theile theilten die Aſtronomen wieder in 90 kleinere Theile, welche ſie Grade nannten; folglich zählt man 90 Grade auf den Bogen zwiſchen den Schenkeln eines rechten Winkels.

Die ganze Kreislinie wird alſo 4 . 90 = 360 Grade halten, möge dieſelbe ſo groß oder ſo klein ſeyn wie ſie wolle; die Anzahl der Grade wird bleiben, nur die Größe der Grade ſich verändern, wie auf dem Bogen ki und db, deutlich zu erſehn iſt. Jeder Grad wurde wieder in 60 Theile, welche Minuten heißen, getheilt, und jede Minute wieder in 60 Theile, ſogenannte Se-

cunden, jede Secunde wieder in 60 Theile, ſogenannte Tertien.

Die Bezeichnung der Grade iſt (°), der Minuten ('), der Secunden (''), der Tertien ('''). Es würde alſo auch 90 Grad folgendermaßen bezeichnet werden können. 89°, 59', 59'', 60'''.

§. 165.

Dritter Lehrſatz. Wenn durch den Endpunct des Durchmeſſers eine ſenkrechte Linie gezogen iſt, ſo kann ſolche den Kreis nur in einem einzigen Puncte berühren, und iſt daher nach pag. 196. Tangente.

Fig. 41. iſt kl, Tangente.

Beweis.

Da in der ganzen Kreislinie kein Puuct mit dem andern in einer graden Linie liegt, ſo würde alſo Kl wenn ſie noch mehr als den einen Punct berühren ſollte, ſich nach d oder g neigen müſſen; dieſes darf ſie aber nicht, denn ſonſt würde ſie aufhören, den Durchmeſſer ab ſenkrecht oder rechtwinklicht zu ſchneiden. Jeder aus dem Endpunkte des Durchmeſſers errichtete Perpendikel, iſt alſo Tangente ſeines Kreiſes.

§. 166.

Vierter Lehrſatz. Der Centriwinkel iſt jederzeit doppelt ſo groß, als der mit ihm auf demſelben Bogen ſtehende Peripheriewinkel.

Fig. 42. ∟ bcd = 2 ∟ bad,
∟ bce = 2 ∟ bae,
∟ bcf = 2 ∟ baf.

Beweis

Es kann der obige Lehrſatz in dreyen Fällen Anwendung finden, wenn nemlich:

a. Das Centrum auf einem Schenkel das Peripheriewinkels liegt; wie beym ∟ bad. —

b. Wenn das Centrum zwiſchen den Schenkeln ſolches Winkels liegt; wie beym ∟ bae. —

c. Wenn das Centrum außerhalb der Schenkel liegt; wie beym ∟ baf.

Ad a. Man verlängere ac nach d, und ziehe bc: ſo iſt ∟ x = ∟ y, — nach §. 122. und ∟ v = ∟ x + y + nach §. 119; alſo auch ∟ v = 2 ∟ y; oder ∟ bcd = 2 ∟ bad.

Ad b. Man ziehe wie vorhin bc und cd und noch ce: ſo iſt auch ∟ z = ∟ q, und ∟ w = ∟ z + ∟ q = 2 ∟ z; bekanntlich iſt

aber ∟v = 2∟y, alſo ∟v + ∟w = 2∟y + 2∟z, folglich auch ∟bce = 2∟bae; — denn ∟y + z iſt ja gleich, einem ∟bae. —

Ad c. Man ziehe fc und bc und cd; ſo bleibt ∟v = 2y; und ∟fcd = ∟caf + ∟cfa; und da ∟caf = ∟cfa; alſo ∟fcd = 2∟caf. Der ∟fcd − ∟v alſo = 2∟caf — 2y; das iſt, ∟bcf = 2∟baf.

Dieſer Lehrſatz iſt für jeden Geometer in vielfacher Rückſicht, beſonders aber, wegen des ſogenannten Centrirens der Winkel, wichtig. Centriren heißt nemlich, „einen nicht gemeſſenen Winkel, durch einen andern gemeſſenen Winkel und „gewiſſe andere geometriſche Operationen beſtimmen.“ Dieſes geſchieht nemlich, wenn z. B. einer der obigen Centriwinkel wegen ungünſtiger Umſtände im Felde oder Walde nicht gemeſſen werden könnte, aber man könnte einen dazu gehörigen Peripheriewinkel meſſen und durch dieſen, jenen beſtimmen. In der practiſchen Geometrie darüber das Nöthige.

Zuſatz.

Aus obigem Lehrſatze ergeben ſich nachſtehende Folgen.

1. daß alle Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen ſtehn, wie in Fig. 43 ∟a, ∟b, ∟c, ∟d, über xyz einander gleich ſind. Denn die Centriwinkel derſelben, ſind einander gleich und von den Centriwinkeln iſt jeder Peripheriewinkel

die Hälfte. Die Hälften gleicher Ganzen, ſind aber auch unter einander gleich.

2. Jeder Peripheriewinkel, deſſen Schenkel durch die Endpunkte der Durchmeſſer gehen, iſt ein rechter. In Fig 30. iſt $\angle p = \angle xaB + xBa$, und $\angle q = \angle xBC + \angle xCB$; ferner

$$\angle ABx + \angle xBC = \angle xAB + \angle xCB.$$

Da nun dieſe 4 Winkel gleich $\angle p + \angle q$, ſo iſt $\angle xAB + \angle xBC = \frac{1}{2} \angle p + q$ oder $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle p + q$ Nach §. 115. iſt aber $\angle p + q = 2R$; alſo $\frac{1}{2} p + q = R$, alſo auch $\angle ABC = R$.

Dieſer Satz giebt eine leichte Methode an die Hand, die Richtigkeit der hölzernen Dreyecke, und aller Winkelhaken überhaupt, zu prüfen.

Auch kann man daher über einer gegebenen Linie z. B. Fig. 30, AC, leicht ein R△ zeichnen; denn wenn man die Linie halbirt, und mit dem Halbmeſſer den Halbkreis zieht, ſo wird jeder Punct der Peripherie, zu welchem man auch immer aus A u. C Schenkel zieht, der Scheitelpunkt eines rechten Winkels ſeyn.

§. 167.

Von den regulairen Vielecken.

Lehrſatz. Zwey regulaire Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten, ſind ähnlich.

Beweis.

Wenn man die Seiten der regulairen 6ten Figur

abdhik halbirt, und ſenkrechte Linien durch ihre Mitte zieht; ſo werden ſich ſolche in der Mitte der Figur in einen einzigen Punkte ſchneiden, und dieſer das Centrum ſeyn, aus welchem mit gleichem Halbmeſſer um alle Ecken der Figur ein Kreis gezogen werden kann.

Ferner; aus den Ecken der Figur zum Centro Linien gezogen, werden lauter gleiche Dreyecke — ſo viel, als die Figur Seiten hat — entſtehn; und gleiche Dreyecke, haben auch gleiche Seiten und Winkel.

Da ſich dieſes von jeder regulairen Figur beweiſen läßt, ſo beſtimmt bloß die gleiche Anzahl der Seiten die Aehnlichkeit zwiſchen zweyen dergleichen, und iſt deshalb Fig. 6, das kleinere Sechseck auch ähnlich dem größern.

Zuſatz.

1. Die Seiten eines regulairen Vielecks verhalten ſich wie die Halbmeſſer des um ihre Ecken zu beſchreibenden Kreiſes.
2. Verhalten ſich die Halbmeſſer wie die Perimeter.

Da nun die Anzahl der in einem Kreiſe zu beſchreibenden Polygone, als unendlich gedacht werden kann deren Seiten ſich alſo zuletzt als in die zarteſten phyſicaliſchen Punkte aufgelößt denken laſſen: ſo kann man auch ohne einen für die Ausübung merklichen Fehler dadurch zu gründen, annehmen:

„daß ſich die Peripherien der Kreiſe verhalten, wie
„die Halbmeſſer.“

Zieht man nun die Sehnen der Bogen, welche zwiſchen den Schenkeln der am Mittelpuncte regulairer Polygone liegenden, oder zu bilden möglichen gleichen Dreyecke eines Polygons, befindlich ſind, das iſt: „den Radien des zu ihnen gehörigen Kreiſes innerhalb oder außerhalb einen concentriſchen Kreis;“ ſo wird ſich ſehr leicht erweiſen laſſen, daß regulaire Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten, ähnlich ſind.

Aufgaben.

1ſte Aufgabe. Den Polygon und Centriwinkel, zu finden!

Auflöſung.

Man vermindere die Zahl von 2mal ſo viel R ∟ als Seiten da ſind, um 4, und dividire den Reſt, durch die Zahl der Seiten. Fig 6, hat 6 Seiten, alſo $12 - 4R : 6 = 1\frac{1}{3}R$. Da nun ein R ∟ $= 90°$, alſo $1\frac{1}{3} = 120°$ der Polygonwinkel.

Der Centriwinkel wird gefunden, wenn man 4 R durch die Zahl der Seiten des Vielecks dividirt. Alſo hier Fig 6. $4.90° = 360° : 6 = 60°$ der Centriwinkel. Da nun der Polygonwinkel eines Sechsecks = 120 Grad, und der Polygonwinkel ſo groß iſt, als 2 denſelben bildende gleiche Winkel der gleichen Dreyecke, ſo iſt einer dieſer beyden Win-

kel ſeine Hälfte, alſo 60°. Da nun der andere Winkel an der Grundlinie auch 60°, ſo ſind alle 3 Winkel eines ſolchen Dreyecks gleich; das Dreyeck daher folglich gleichſeitig, und auch der Radius die Sehne zu einem Winkel von 60°, und zugleich die Seite eines Sechsecks in jedem Kreiſe; welches man wohl merken muß.

2te Aufgabe. Dreyecke, Vier- Fünf und Sechsecke in einem Kreiſe zu zeichnen.

Auflöſung.

Die Zeichnung des Sechsecks bahnt den Weg zur Zeichnung des Dreyecks. Erſteres ergiebt ſich, wenn der Radius 6mal im Kreiſe herumgetragen, und die Puncte deſſelben wie Fig. 6 zuſammengezogen ſind. Zieht man von dieſen 6 Puncten nur 3 Puncte, als a d i zuſammen, ſo hat man ein Dreyeck. Ein Viereck bildet ſich, wenn man ſich 2 Durchmeſſer rechtwinklicht in einem Kreiſe ſchneiden läßt, und die Endpuncte der Halbmeſſer durch Linien verbindet. Ein Fünfeck, wenn man Fig. 5 den Halbmeſſer a c halbirt, aus dem über c ſenkrechten Puncte g die Linie g h zieht, und ſolche im Kreiſe herum trägt. Durch Halbirung der Seiten dieſer 4. 5. 6 Ecken, kann man die Seiten von 8, 10, 12 Ecken erhalten ꝛc.

§. 168.

Von irregulairen Vielecken.

Erklärungen.

Das Zuſammentreffen zweyer Linien bildet an dem Scheitelpuncte ſtets 2 verſchiedene Winkel; „nemlich einen hohlen und einen erhabenen Winkel. Reißt man wie z. E. in Fig. 45 aus c auf die Schenkel ac bc einen Bogen azyb, ſo heißt der Winkel acb, welchem dieſer große Bogen zugehört, ein erhabenes; hingegen wird auch der Bogen von a nach b verlängert, ſo heißt der zwiſchen dieſem kleinen Bogen liegende ∟ x ein hohler Winkel. Man kann ſich auch leicht überzeugen, daß erſterer ſtets größer, letzterer ſtets kleiner als 2 R ∟ ſey. Da nun die Neigung der einen Winkel bildenden Seiten einer Figur, ſo gut einwärts als auswärts Statt finden kann, ſo bilden ſich dadurch ſowohl im innern als außerhalb derſelben, erhabene und hohle Winkel. Weil nun ferner alle Winkel, welche innerhalb der Umfangs-Seiten liegen, innere, und alle, welche außerhalb derſelben liegen, äußere genannt werden können; ſo giebt es alſo auch in Rückſicht der Figuren innere und äußere erhabene, und hohle Winkel. Alle innere erhabene Winkel nennt man auch häufig einwärts gehende; die innern hohlen derſelben dagegen ausgehende Winkel. Soll daher die Summe aller innern Winkel

einer Figur gefunden werden, ſo müſſen die etwa daſeyenden innern erhabenen Winkel, nicht mit ihren äußern hohlen Winkeln verwechſelt und dieſe für jene genommen werden; welches Anfänger oft verſehn.

Die in Dreyecke zerlegte 45ſte Figur, zeigt den bedeutenden Unterſchied, der daraus entſtehen kann; der innere erhabene Winkel acb beſteht aus der Summe der 3 Winkel, ∟ acz + zcy + bcy; wofür dieſe Figur, der hohle ∟x nicht ſo groß iſt, als nur einer dieſer 3 Winkel. In der nächſt folgenden 4ten Abtheilung, wird die Beſtimmung der Größe dieſer Winkel in Maßen, gelehrt werden.

Daß die Summe aller Winkel jeder Figur, 2mal ſo viel R enthalte, als die um 2 verminderte Anzahl der Seiten, oder doppelt ſo viel R, als die ganze Anzahl der Seiten weniger 4 R, zeigt auch dieſe Figur 45; vier Dreyecke, welche 4.2 R = 8 R, enthalten.

4. Anwendung der Arithmetik, auf die bisher vorgetragenen geometriſchen Sätze.

A. Meſſung der Linien.

§. 169.

a. Meſſung der geraden Linien.

Eine Linie meſſen, heißt unterſuchen, wie

vielmal eine andere bekannte Linie in ſolcher enthal⸗ten iſt: dieſe letztere heißt das Maß, welches eine willkürliche Größe haben kann, und zwar das Län⸗genmaß, zum Unterſchiede von dem Maße für Flä⸗chen.

Die Länge des Schuhes oder Fußes eines erwach⸗ſenen Menſchen, iſt in der Feldmeßkunſt als Haupt⸗maß angenommen; man nennt ſolches daher auch das Grundmaß.

Außer dem Fußmaße iſt das eingeführte Ru⸗thenmaß noch beſonders zu berückſichtigen; es be⸗ſteht aus einer Zuſammenſetzung mehrerer gleichen Füße, nach der Länge.

Nach der Anzahl der Schuhe, heißt ſolches 10⸗ſchuhicht, 12, 13, 14, 15, 16 ꝛc. ſchuhicht. Iſt die ganze Länge der Ruthe (ohne Rückſicht auf die Anzahl ihrer Schuhe, aus welchen ſolche zuſam⸗mengeſetzt iſt, zu nehmen) in 10 oder 12 gleiche Theile getheilt, ſo heißt ein Theil der erſtern, ein Decimalfuß, ein Theil der letztern Eintheilung aber, ein Duodecimalfuß.

Der Decimalfuß wird ſtets wieder in 10 gleiche Theile, welche Decimalzolle, jeder dieſer wieder in 10 Decimallinen, jede dieſer wie⸗der in 10 Decimalſcrupel ꝛc. ſo wie der Duodeci⸗malfuß, durch Untereintheilung von 12 zu 12 Theilen, ebenfalls in ſogenannte Duodecimalzolle, Linien, Scrupel ꝛc. eingetheilt.

Die Bezeichnung dieſer Maßeintheilungen iſt folgende:

Oberhalb zur Rechten wird eine Null, oder ein Strich, zwey Striche, drey Striche ꝛc. an diejenige Zahl geſetzt, welche entweder eine Ruthe, einen Fuß, Zoll ꝛc. bezeichnen ſoll; als, 3 Ruthen, 2 Fuß, 5 Zoll, 6 Linien, 3 Scrupel ꝛc. durch 3°, $2'$, $5''$, $6'''$, $3''''$. Noch ſicherer iſt die Beyſetzung der Buchſtaben R, F, Z, L, S, und r, f, z, l, ſ.

Iſt eine Ruthe aus 10 Fuß zuſammengeſetzt, der Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien, die Linie wieder in 10 Scrupel getheilt, ſo heißt ein ſolches Maß, „das Decimalmaß,“ das geometriſche Maß. Beſteht hingegen eine Ruthe aus 12 Fuß, jeder Fuß aus 12 Zoll ꝛc. Dann das Duodecimalmaß, gemeine Maß, Werkmaß. Man kann die Zahlen dieſer beyden Maße, die des erſten mit großen Anfangsbuchſtaben, die des letztern mit den kleinern des lateiniſchen Alphabets bezeichnen.

3R, 2F, 6Z, 5L, 6S; und 2r, 3f, 4z, 3l, 2ſ,

Decimal, Duodecimal.

§. 170.

Daß bey obiger Eintheilung, zweyer gleichlangen Ruthen, die Decimalfuße, Zolle ꝛc. größer als die Duodecimalfuße, Zolle ꝛc. ſeyn müſſen, leuchtet von ſelbſt ein; man muß

aber überdieß ja noch bemerken, „daß es nützlich gefunden worden iſt, ebenfalls 2 gleich lange Füße decimal- und duodecimalartig einzutheilen;“ hier ſind dann die Fuße, wie dort die Ruthen als Ganze anzuſehen, und deshalb wohl von jenen Fußen der Ruthen zu unterſcheiden; Unachtſamkeit auf dieſen Gegenſtand, giebt Veranlaſſung zu falſchen Rechnungen, wenn Decimalfuße und Duodecimalfuße in einander verwandelt, welches reduciren genannt wird, werden ſollen.

Da die decimal- oder duodecimalartig eingetheilten Fuße, aber ſowohl gleich als ungleich ſeyn können; weil das Grundmaß nicht blos in mehrern Ländern, ſondern öfterer ſelbſt in den Provinzen eines und deſſelben Landes verſchieden iſt; ſo muß man die verſchiedene Größe der Füße (ohne auf ihre Eintheilung Rückſicht zu nehmen) wie viel nemlich z. B. der Gothaiſche Fuß kleiner oder größer als der Rheinländiſche ſey, zu beſtimmen wiſſen; welches ſelbſt auch ohne den Zweck dieſer Eintheilungsreduction, ſehr oft nützlich iſt und nothwendig wird. — Es ſoll daher die dazu erforderliche Anleitung und nöthige Tafel der Grundmaß-Verhältniſſe, vorangehn.

§. 171.

Reducirung des Längenmaßes.

Theilt man eine beſtimmte Länge in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile, und zählt, wie viel

Ein Fuß zu					hält	Pariſer Fußthei[le]
Nürnberg	=	=	=	—	=	1346
Paris	=	=	=	—	=	1440
Reinländ. gem. Fuß		=	=	—	=	1392
——— geometr. oder Feldfuß				—	=	1669
Riga	=	=	=	—	=	1215
Rom, alter		=	=	—	=	1306
——, neuer oder Palma			=	—	=	990,
Rußland		=	=	—	=	1550
Schweden		=	=	—	=	1316
Strasburg		=	=	—	=	1282
Ulm	=	=	=	—	=	1281
Wien, Baufuß		=	=	—	=	1411,
———, gemeiner		=	=	—	=	1400
Würtemberg		=	=	—	=	1278
Zürch u. in der Schweiz			=	—	=	1340

Tabelle,

verſchiedener Feldm[aße]

Der Anſpacher Morgen = =
= Baſeler Juchart = =
= alte Morgen in der Churmark Brandenb[urg]
= M. Brandenb. Hufe = =
= Braunſchweig. Morgen = =
= Vorling = = =
= Drohne = = =
= Calenberg. Morgen = =
= Engelländiſche Acker = =
= Erfurter Morgen = =
= Franzöſ. mittlere arpent
in isle de Fr. (die Längenruthe zu 20 Fu[ß]
= Gießner Wald = und Feldmorgen =
= althalliſche Feldacker (60 Ruth. lang 5 Ru[th.]
= Gothaiſche = =
= Hamburg. Morgen (120 Ruth. lang

ßes

…r …le	Logarithmen	Rheinl. gemeine Fußtheile.
3/4	3.1292870	968
	3.1583625	1035 4/5
	3.1436392	1000
1/2	3.2225864	1200
	3.0845763	873 1/4
	3.1159432	938 2/3
3	3.9957668	711,8
	3.1903317	1114 1/5
	3.1192559	945 7/8
3/4	3.1081420	921 3/4
	3.1075491	920 3/4
7	3.1497424	1014 2/3
	3.1461280	1006 1/4
	3.1065309	918 9/16
	3.1271048	963 1/8

…aßen.

	hält	360	□ Ruth.
	—	140	= = =
…rg	—	300	= = =
	—	30	Morgen.
	—	120	□ Ruth.
	—	1/2	Morgen.
	—	3/4	Morgen.
	—	120	□ Ruth.
	—	160	= = =
	—	168	= = =
ß.)	—	100	= = =
	—	160	= = =
…it)	—	300	= = =
		160	= = =
		600	= = =

ſolcher Theile genau eine andere beſtimmte Länge meſſen; ſo erfährt man, um wie viel Theile die eine Länge größer oder kleiner als die andere iſt; das heißt, man erfährt ihr Verhältniß. Hierauf beruht die ganze Reducirung des Längenmaßes.

Man hat den ſogenannten Pariſer Königsfuß, in 12 Zoll, jeden Zoll in 12 Linien, jede Linie in 10 Theile, (points, Puncte) eingetheilt; folglich in 12.12.10 = 1440 Theile: und mit einem dieſer Theile die ſämmtlichen Füße der Länder gemeſſen; dadurch fand man z. E. daß der Anſpacher Fuß 1320, der Gothaiſche 1275, der Rheinländiſche 1392 ꝛc. von ſolchen Theilen enthalten; folglich, da ſich die Ganzen wie ihre Theile verhalten, alſo verhält ſich der Anſpacher, (mit A bezeichnet) zum Gothaiſchen (mit G bezeichnet) wie die Zahlen ihrer gleichen Theile vom Pariſer Fuße; das iſt, A:G = 1320:1275, und da das Product der mittlern Glieder gleich dem der äußern, ſo iſt 1320.G = 1275.A; oder 1320 Gothaiſche Fuß-Maßeintheilung gleich 1275 der Anſpachiſchen. Beyde Zahlen können nun als Fuße oder als Ruthen, Zolle ꝛc. des 10, 12, 13, 14 15, 16 ſchuhichten Ruthenmaßes der Decimal- und Duodecimaleintheilung angeſehen werden; nur müſſen einleuchtend, die Maßen, welche von ſolchen Zahlen bezeichnet werden, (beyde der A und G ꝛc.) gleicher Art ſeyn; d. i. beyde z. E. Ruthen, oder beyde Fuße ꝛc. und zwar auch beyde, deſſelben Ruthenmaßes und Eintheilung; dadurch

iſt es ungemein leicht, die Reduction der Maßen als Ganze betrachtet, (ohne Mitberückſichtigung der Untereintheilungen) vorzunehmen. Man kann durch die Proportions-Rechnung oder Regel de Tri nun ſogleich finden, wie viel eine Anzahl Ruthen, Fuße, Zolle, Linien ꝛc. des einen Landes, Ortes ꝛc. an Ruthenzahl, Fußen, Zollen, Linien ꝛc. des andern Landes ꝛc. betrage. Man ſuche nemlich die Anzahl der Theile, welche das Fußmaß jedes in der Tabelle angegebenen Ortes enthält, auf, und ſetze ſich aus dieſen ein, nach der beliebigen Stellung der Ortsbuchſtaben zu ordnendes Verhältniß, zuſammen; das heißt: ſteht z. B. der Anſpacher Name vorn als erſtes Glied, ſo muß ſeine zugehörige Zahl ebenfalls das erſte Glied im Verhältniſſe ſeyn, und umgekehrt; als A : G = 1320 : 1275; nicht aber A : G = 1275 1230, dieſes wäre nach Proportionsgeſetzen falſch: iſt dieſe Proportion richtig, ſo zeigt ein Blick „wie viel „Theile des einen Ortsmaßes gleich ſind den Theilen „des andern — 1275 A = 1320 — betragen.“

2tens. Wenn Ruthen, Fuße, Zolle ꝛc. reducirt werden ſollen; dann muß man ebenfalls wieder unterſcheiden,

a. Ob die Decimal- und Duodecimalruthen gleich groß ſind oder

b. ob ſolche nicht gleich groß ſind.

Dieſe verſchiedenen Fälle und deren zwiefache Nebenberückſichtigung muß man ſich mit ihren, unter ihren Nummern befindlichen nachſtehen-

den Auflöſungen, bey Reducirungen ins Gedächtniß zurückrufen, und prüfen, in welchem Falle die gegebene Aufgabe enthalten, und wie ſie aufzulöſen ſey ꝛc.

Ad 1 a; wenn der Decimal und der Duodecimalfuß gleich groß ſind, dann wird

	10 Z des Decim. ⸗	=	12 z des Duodec. Fußes,
*	100 L ⸗ ⸗ ⸗	=	144 l ⸗ ⸗ ⸗ ⸗
	1000 S ⸗ ⸗ ⸗	=	1728 ſ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗
	10000 Q ⸗ ⸗ ⸗	=	20763 q ⸗ ⸗ ⸗ ⸗.

Sind nun Fuße des einen oder des andern zum Reduciren gegeben, z B. 2 2′ 5″ (Decimal oder Duodecimal), ſo verwandelt man ſolche, wenn die Umſtände eine beſondere gewiſſe Genauigkeit erfordern, in irgend beliebige kleinere Maßen, z. B. in Fuße, in Zolle, Linien ꝛc. alſo obige 2 2′ 5″ in Decimal⸗Zolle = 225′ (ſchon durch die Decimaleintheilung darinn ausgedrückt) oder in Duodecimal⸗Zolle = 22 . 12″ + 5′ = 269″, und nimmt aus obigen * das Verhältniß dieſer Zollmaßen zum Proportionsanſatze; die Berechnung bleibt die gewöhnliche, als

für 225″ Z	10	12
in Duodez.	*	225
Fac. 226″	Dec.	

für 269″ Z	12	10
in Dec.	*	269
Fac. 224 Duod.		

für 22′6″ Z		
in Decimal	12	10
	*	226
22′5″	Dec	

Ad 1. b. Sind die Füße ungleich, ſo ſuche man nach der Tafel ihr Verhältniß in Theilen des Pariſer Fußes; und reducire ſolche dann auf einerley Längenmaß. Da man nun nach dem vorhergehenden

§. die Verhältnißzahlen der Tafel, als Ruthe, Fuß ꝛc. des 10 und 12 Theil Maßes anſehen kann: ſo wähle man das, der Aufgabe angemeſſene Maß, (Decimal oder Duodecimal) und reducire wie ſub. a, gezeigt iſt.

Wie viel ſind z. B. 22 F 5 Z Goth. Dec. in Ohrdruffer. Duodecimalmaß?

1234 G = 1275 O | 225 / * / Fac. 23′2″ } Nun ſagt man { 10 | 12 / * | 232 / Fac. 23′ | 2″ $\frac{2}{5}$ } Alſo 22 F 5 Z Goth. Dec. = 23 f $2\frac{2}{5}$ z Ohrdruff. Duodez. Maß.

Man kann ſich auch für einen Decimal- und Duodecimal-Zoll, Linie, Scrupel ꝛc. zur Reduction Formeln berechnen. Um dergleichen für Zolle zu erhalten, ſagt man fürs Decimalmaß,

π | ,10″ | 12″ „ / * | 1 Dec. } für Duodecimalmaß, φ | 12″ | 10″ / * | 1 Duodec.

Fac. $1\frac{1}{5}$ Zoll. Fac. $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$Z = 1\frac{1}{5}\ z$ $z = \frac{5}{6}\ Z$

In π verwandle man den $\frac{1}{5}$ Duodecimal-Zoll in Duodecimal-Linien, Scrupel, Quarten und den letzten Bruchtheil in einen Decimalbruch; in φ ebenfalls die $\frac{5}{6}$ Dec. Zoll, in Dec. Linien ꝛc.; ſo erhält man das Verhältniß der Zolle beyder Maßen. Eben ſo ſucht man Formeln für die Linien und Scrupel; und zwar iſt

Z = z + 2l + 4ſ + 9,6q (1 Decimal Zoll) | u. z = 8L + 3S + 3,3Q
L = l + 5ſ + 3,3q (α) | l = 6S + 9 4Q (β)
S = ſ + 8,7q | ſ = 5,7Q

Sind 2″ Dec. zur Reduction gegeben, ſo multiplicirt man einleuchtend z + 2 l + 4 ſ + 9, 6 q aus (α) mit 2, wären ſolches Duodec.-Zoll, dann 8 L + 3 S + 3, 36 aus (β) mit 2, ꝛc., und addirt ſtets dies durch 10 oder 12 Einheiten dieſer oder jener Zahlſtelle entſtehende Maß der nächſt größern Maße zu den darin befindlichen; als in obigem Falle giebt 2 . 9, 6 = 19, 2; in 19 q, ſteckt 1 Scrupel; denn 12 q = 1 Scrupel; alſo bleiben in der Stelle der q, nur 7, 2 q ſtehn; der 1 Scrup. wird zu den Scrupeln addirt, und eben ſo fängt man in der andern Formel (β) ebenfalls von der Rechten zur Linken an, und bemerkt nur „daß hier 10 Q = 1 S und 10 S = 1 L ꝛc.“

Obiges Beyſpiel ſub Nro. 1 a, würde nach dieſer Formel gelößt, geben

$$6z + 0l + 0ſ + 0, 0q, = 6z$$
$$5 . (z + 2l + 4ſ + 9, 6q) = 5z + 10l + 20ſ + 45, \tfrac{30}{10}q.$$

Nota. Da die Fuße in dieſem Beyſpiele als gleich angenommen werden, ſo bleiben ſolche in der Berechnung weg, denn wenn 1 Dec. F. = 1 Duodez. f., ſo ſind auch 22 Dec F. = 22 Duodez. f., und deshalb bloß hinzu zu ſetzen; alſo auch hier, 22 F. 5 Z = 22 f 6 z Man kann ſich die übrigen berechneten Aufgaben nun ſelbſt (zur Probe) nach den Formeln löſen.

Ad 2, a. Wenn die Decimal und Duodecimal-Ruthen gleich ſind, ſo hat man

10 F = 12 f † 100 Z = 144 z 1000 L = 1728 l 10000 S = 20763 ſ	Man braucht daher aus † bloß die zum zu reduci- renden Maße paſſende Ver- hältnißzahlen zu wählen, und wie ſub No. 1. zu berechnen.

Da hier die Ruthen gleich groß ſind, ſo bleiben ſolche im Anſatze weg, und man berechnet bloß die Fuße, Zolle ꝛc. Wie viel ſind z. B. 22R 5F 5Z in duodec. Maß? Zuerſt verwandelt man die Fuße in Zolle, als das kleinſte Maß = 55Z; und ſagt, 100 | 144
* | 55

Facit $79\frac{1}{5}$ Duodec. Zoll = 6 f, 7 z, 2 l, 4 ſ 9 q ꝛc.

So verhält ſich
z. B. der Goth. : Ohrdr. = 1275 : 1234; der

Ohrdr. : Rheinl. = 1234 : 1392; alſo ſind 1275

Ohrdr. = 1234 Goth. und 1234 Rheinl. = 1392 Ohrdr. Ruthen, oder Fußen, Zollen ꝛc. Nachſtehende und alle ähnliche Berechnungen ſind nunmehro leicht.

1). Wie viel ſind z. B. 617 Rheinl. Ruthen, Ohrdruffer?

1234 : 1392 = 617 : x | $\frac{1392.617}{1234}$ = 696. Ohrdr. : Rheinl.

2). Wie viel ſind 6170 Dec. Fuß Rheinl. in Ohrdruff. Dec. Fußen?

3). Wie viel ſind 7404 Duodec. Ruth. Rhnl. in Ohrdr. Duodec. Ruthen?

Ad. 2). 1234 | 1392 / 6170 } Facit = 6960.
*

Ad 3). 1234 | 1392 / 7404 } Facit = 8352.
*

Welchen großen Nutzen die Decimaleintheilung vor der Duodecimaleintheilung habe, leuchtet auch ſchon daraus ein, daß man die Verwandlung der Ruthen in Fuße, bloß durch Anhängung einer Null, weil 10 F = 1 R, folglich um Fuße zu erhalten, die Zahl der Ruthen mit 10 multiplicirt werden müſſen, wodurch ebenfalls in die letzte Decimalſtelle eine Null kommen wird, ferner die Verwandlung der Fuße in Zolle, aus gleichen Gründen ebenfalls durch Anhängung einer Null, und eben ſo der Linien, Scrupel ꝛc. ohne Rechnung gleich vornehmen kann. So ſind z. B. 617 Dec. R in Fußen = 6170; in Zollen = 61700; in Linien = 617000; in Scrupeln = 6170000; und umgekehrt, eben ſo leicht eine Anzahl Scrupel, Linien, Zolle, Fuße (Statt der Diviſion durch 10, 100, 1000, weil 10 Scrupel = 1 Linie, 100 Scrupel = 1 Zoll ꝛc.) durch Abſchneiden 1, 2, 3

Nullen, in Linien, Zolle, Fuße, Ruthen; verwandelt wird; welches bey der Duodecimaleintheilung erſt durch mühſames Rechnen geſchehen muß. Wie viel ſind z. B. 6170000 Dec.-Scrupel in Ruthen, oder Fußen, Zollen, Linien?

Antwort, $617^{\circ}\,0'\,0''\,0'''\,0''''$. Wie viel ſind $3263964''''$ D. in Ruthen.

R. . : . . .

. . F . . . . .

. . . . . Z . : .

. . . . L . .

Da Linien, das nächſt größere Maß zu Scrupeln iſt, (denn 10 Scr. = 1 Linie) und ſo in jeder nachfolgenden Decimalſtelle, ſtets die zu nächſt größern Maßen ſtehn, als Zolle und Fuße; und gegenwärtig doch Ruthen gefunden werden ſollen; ſo muß man hier alſo 4 Zahlen von der Rechten zur Linken abſchneiden, und erhält $326^{\circ}|3'9''6'''4''''$; die Fuße, Zolle und Linien, kann man nun ſogleich ohne weiteres Abſchneiden, leſen.

Eben ſo leicht wird nun auch das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Verwandlung dieſer Maßen in Decimalbrüche ꝛc. Zuerſt werden die gegebenen Maßen auf einerley Benennung gebracht, und dann wie gewöhnlich addirt, ſubtrahirt ꝛc. Es wären z. B. 4 Zoll und 8 Ruthen; oder 6 Fuß 5 Linien zu addiren, von einander zu ſubtrahiren, mit einander zu multipliciren ꝛc.

Addition.		Subtraction.	
	8°0′ 0″		8°0′0″
	4		4
	8 0 4		7 9 6
und	6′ 0′ 0‴	und	6 0 0
	5		5
	6 0 5		5 9 5

Multiplic.		Diviſion		
	8°0 0″		8°0′0″	2°0′0″
	4		4	
	32°0 0″	u.	1 1 6 0 0	1°2′0″
und	6 0 0		5 5	
	5			
	30° 0′0″			

Und da jedes niedere Maß, als ein 10 theiliches Bruchſtück des zunächſt höhern, angeſehen werden kann; ſo wird auch der Ausdruck in die zum Rechnen ſo bequemen Decimalbrüche, ſehr leicht. Denn 39°6 5″3‴ = 39°,653; (als 39 ganze Ruthen, 6 Zehntel, 5 Hundertel, 3 Tauſentel Ruthen) Jeder Anfänger übe ſich daher in der Benutzung dieſer ihm ſchon längſt bekannten und bloß in einer andern Geſtalt vorgelegten arithmetiſchen Wahrheiten, und ſuche ſich darinn die möglichſte Gewandheit zu erwerben, weil die Decimaleintheilung in der ganzen Geometrie angenommen iſt. Nun wird die Reducirung der Decimal- und Duodecimalmaße, folgen können.

§. 172.

Reducirung des Decimal- und Duodecimalmaßes.

Die Fälle, in welchen dieſe Reduction Statt findet, ſind ſolgende:

1. Wenn eine gegebene Anzahl Fuße und Zolle, oder Linien ꝛc. des einen dieſer Maße, in Fuße, Zolle ꝛc. des andern Maßes, verwandelt werden ſoll. Dann kann aber (welches wohl zu unterſcheiden iſt):

a) ein Fuß der zu reducirenden Fuße entweder ſo groß als ein Fuß des Maßes, worauf reducirt werden ſoll, „das iſt, der Decimalfuß = dem Duodecimalfuße ſeyn, oder es können

b) dieſe Füße nicht gleich groß ſeyn.

Oder, man berechne ſich auch hier für die Decimal- und Duodecimal-Zolle, Linien ꝛc. Formeln. Der Anſatz dazu iſt:

$$\underbrace{\begin{array}{c|c||c|c} 100'' & 144'' & 144'' & 100'' \\ * & 1'' & * & 1'' \end{array}}_{\text{Für Decimal- für Duod. Zoll.}}$$

und

$$\underbrace{\begin{array}{c|c||c|c} 1000''' & 1728''' & 1728''' & 1000''' \\ * & 1''' & * & 1''' \end{array}}_{\text{Für Decimal- und für Duodec. Linien.}}$$

Die Formeln, welche man dadurch erhält, ſind:

$$\gamma\begin{cases} Z = z + 5\,l + 3\,\text{ſ} + 4{,}3\,q \\ L = l + 8\,\text{ſ} + 8{,}8\,q \\ S = 2\,\text{ſ} + 0{,}9\,q \end{cases} \qquad \delta\begin{cases} z = 6\,L + 9\,S + 4{,}4\,Q \\ l = 5\,S + 7{,}8\,Q \\ \text{ſ} = 4{,}8\,q. \end{cases}$$

Nach der Formel γ, würden 55 Decim. Zoll in Duodec. Zollen ꝛc. betragen:

$$55 \cdot (z + 5^{l} + 3^{\text{ſ}} + 4{,}3\,q) = 55^{z} + 275^{l} + 165^{\text{ſ}} + 220\,q + \tfrac{165}{10}\,q = 79^{z} + 2^{l} + 4^{\text{ſ}} + 8{,}5\,q,$$ wie vorhin.

Ad 2. b. Sind die Decimal- und Duodec. Ruthen, ungleich groß; ſo ſuche man

zuerſt das Verhältniß derjenigen Fuße, aus welchen beyde durch Zuſammenſetzen entſtanden ſind, d. h. derjenigen Fuße, nach Pariſer Fußtheilen, welche bey jeder Ruthe das Grundmaß waren, und betrachte die Verhältnißzahlen der Tafel, als Decim. oder als Duodecimalruthen, nachdem die Aufgabe Decim. oder Duodec. Maß enthält, und berechne nun wie ſub No. 1. a. und b., und No. 2. a., gezeigt iſt.

Wie viel ſind z. B. 22 r, 5 f Duodec. Goth. in Ohrdruff. Decimal.?

1234 G.	1275, O.	u. ſchließt	12 f	10 F
*	269	ferner	*	277
Fac. 277 f Ohrdr.			Fac. 23° 08′′ Z O.	

und wen man ſich Formeln für die Fuße berechnet, nach welchen der Fuß einer Decimal-Ruthe = F = f + 2z + 4l + 9ſ + 7, 2q (des Fußes der Duodec. Ruthe) und der Fuß der Duodec. Ruthe = f = 8Z + 3L + 3S + 3, 3Q (des Fußes der Dec. Ruthe); ſo wird man,

277 . (8Z + 3L + 3S + 3, 3Q) = 2216 Z
831 L
831 S
831 Q
$831\frac{1}{10}$ Q

23° 0′ 8′′ 3′′′ 2′′′′ 4, 1ᵛ Dec.

wie vorhin, erhalten.

§. 173.

Reduction der verſchiedenen (12. 13. 14. 15. 16ſchuhigen) Ruthenmaße aufeinander, mit gleichem und ungleichem Grundmaße.

Hier wollen wir uns bloß auf das Decimalmaß einſchränken, da ſolches in der Geometrie das gewöhnlichſte iſt, und ſich überhaupt die Reduction des Duodecimalmaßes, dann von ſelbſt ergiebt.

Bey der Verſchiedenheit der Ruthen (nach der Anzahl der Schuhe, aus welchen ſolche zuſammengeſetzt wurden) hat man zu berückſichtigen, „ob die Schuhe in beyden Ruthen *gleich groß* ſind, oder nicht;“ dieſe Schuhe ſind alſo NB das *Grundmaß*, aber keine Schuhe, welche durch 10 und 12theilichte Eintheilung der Länge der Ruthe entſtehn; d. i. ob z. B. die 14ſchuhigte Ruthe aus 14 *ſolchen Fußen*, als die 16ſchuhigte zuſammengeſetzt iſt; ob ein 14ſchuhigter Fuß einem 16 ſchuhigten Fuße gleiche ꝛc.

Iſt ein Fuß des Grundmaßes, in *beyden Ruthen gleich groß*, z. B. ein 14ſchuh. Fuß = einem 16ſchuh.; ſo ſetzt man wie der erſte zum 2ten, ſo 14 F. zu 16 F.; alſo, wie

A B

A:B = 14:16; folglich 14.B oder eine 16ſchuh.

Ruthe 14mal genommen = 16 . A, eine 14ſchuh. Ruthe 16mal genommen; d. i. 16 vierzehnſchuh. = 14 ſechzehnſchuh. Ruthen oder 8 vierzehnſchuh. = 7 ſechzehnſchuh. Wie viel ſind z. B. 25° 5′ Goth. 14 ſchuh. Ruthe, in Goth. 16ſchuh.?

Antwort	7	8	Alſo 25° 5′ Goth. 14 ſchuh.
	255	*	= 22° 3′ 1″ Goth. 16 ſchuh.
Fac	2231.		

Iſt aber ein Fuß des Grundmaßes in beyden Ruthen ungleich groß, ſo ſucht man die Verhältnißzahlen in der Tafel auf, und bildet aus ſolchen, wie bekannt, ein Verhältniß ꝛc. und berechnet, wie viel Fuß z. B. 25° 5′ Goth. 14ſchuh. in Ohrdruff. 14ſchuh. Maße betrage — denn die Verhältnißzahlen gelten nach dem Vorhergehenden, für jedes Maß. — Aus dem 14ſchuh. ins 16ſchuh. zu verwandeln, iſt dann, wie ſchon gezeigt wurde, leicht.

Wenn daher 25° 5′ Goth. 14ſchuh. in Ohrdr. 16ſchuh. Maß verwandelt werden ſollen, ſo ſetzt man

1234	1275	u. dieſe nun in 16ſchuh.
*	255	
Fac. 2624 Ohrdr. 14 ſchuh.		

8 (14ſchuh.)	7 (16ſchuh.)
* (16ſchuh.)	2634 (14ſchuh.)
Fac. 2304 Ohrdr. 16ſchuhigt.	

Nachſtehende reducirte Ruthenmaße können Anfängern als Probe und Uebungsbeyſpiele dienen.

Allgemein ſind:

a.	Eine 10ſchuh. Ruthe =	8′3″3‴3⁗	, einer 12ſchuhicht. Ruthe	1²R = 69′43″88‴89²⁗	
	„ 12 „ „ =	9′2″3‴	„ 13 „ „	1²R = 85′19″29‴	
	„ 13 „ „ =	9′2″8‴6⁗	„ 14 „ „	1²R = 86′22″97‴96⁗	(Qua-
	„ 14 „ „ =	1°0 7 6	„ 13 „ „	²R = 1°15′77″76‴	drat-
	„ 14 „ „ =	9′3″3‴3⁗	„ 15 „ „	1²R = 87′10″48‴89⁗	maß.)
	„ 14 „ „ =	8′7″5‴	„ 16 „ „	1²R = 76′56″28‴	
	„ 16 „ „ =	1°1′4″3‴	„ 14 „ „	²R = 1°30′64″49‴	

Für einzelne beſondere Fußmaße:

b.	Eine Ohrdr. 12ſchuh. Ruthe =	8′8″6‴	, einer 12ſchuh. Rheinl.	1²R = 78′49″76‴	
	„ „ 14 „ „ =	1°0′3″4‴	„ 12 „ „	1²R = 1°06′91″56‴	
	„ Goth. 14 „ „ =	1°0′6″8‴	„ 12 „ „	1²R = 1°14′06″24‴	(Qua-
	„ „ 14 „ „ =	1°0′3″3‴	„ 14 „ Ohrdr.	1²R =	drat-
	„ „ 16 „ „ =	1°0′3″3‴	„ 16 „ „	1²R = 1°06′70′89‴	maß.)
	„ „ 14 „ „ =	9′0″4‴	„ 16 „ „	1²R = 81′62″16‴	
	„ „ 16 „ „ =	1°2′2″1‴	„ 12 „ „	1²R = 1°49′32″84‴	

Für a., iſt der Anſatz der Berechnung, z. B.

14 (16ſchuh. R.)	16 (14ſchuh. R.)
1 (14ſchuh. R.)	* (16ſchuh. R.)

Für b, aber z. B.

1392 Goth. 14ſch. R.	1275 Rheinl. 14ſch. R.
* Rh. 14ſch. R.	1 Goth. 14ſch. R.

§. 174.

b. Meſſung der Kreislinie.

Nach §. 165. Zuſatz 3. kann man die Kreislinie als den Perimeter einer regulairen unendlich vielſeitigen Figur, ohne Nachtheil annehmen. Einer der größten ältern Mathematiker, welcher 287 Jahr vor Chriſti Geburt zu Syracus lebte, Namens Archimedes, berechnete das Verhältniß zwiſchen dem Durchmeſſer und der Peripherie, auf die Art, daß er den Umfang eines innerhalb und eines außerhalb des Kreiſes angenommenen 96 Ecks berechnete; zwiſchen welchen die Peripherie ſchon in äußerſt engen Grenzen lag, und das von der Summe beyder Umfänge genommene arithmetiſche Mittel, eine Zahl gab, welche ohne in der Ausübung nachtheilige Fehler dadurch zu begehn, füglich für das Maß der Peripherie ſelbſt, angenommen werden konnte. Das Archimediſche Verhältniß des Durchmeſſers und Kreiſes iſt 7 : 22; noch ein anderes

von Ludolph van Ceulen, iſt das 100 : 314; und von einem gewiſſen Metius, 113 : 355; bey dem letztern iſt der Durchmeſſer nur noch um $\frac{1}{4}$ Millionentheilchen zu groß. Nach Herrn Hofrath Klügel zu Halle, hat ein gewiſſer Lagny, die Peripherie ſchon durch 127 Decimalſtellen ſo genau geſucht, daß man einen ſolchen ungeheuren Kreis, auf deſſen Durchmeſſer eine abgeſchoſſene Kanonen-Kugel mit unveränderter Geſchwindigkeit eine unausſprechliche Zahl von Jahrtauſenden zubrächte, ohne auch nur einen Fehler eines Zolles zu begehn, berechnen kann. Um nun die Peripherie eines jeden Kreiſes durch obige Verhältniſſe zu finden, ſo meſſe man den Durchmeſſer, und ſage, „der Durchmeſſer 7, oder 100, oder 113 giebt eine Peripherie von 22, oder 314, 355, eine wie große Peripherie giebt der gemeſſene Durchmeſſer? Dieſer ſey 12; alſo $\begin{array}{r|l} 100 & 314 \\ * & 12 \end{array}\Big\}$ Fac. $37\frac{17}{25}$ die Peripherie; und umgekehrt kann der Durchmeſſer durch die Peripherie gefunden werden. Die Peripherie ſey 12, alſo $\begin{array}{r|l} 314 & 100 \\ * & 12 \end{array}\Big\}\ \frac{1200}{314} = 3\frac{258}{314}$.

Verfertigung eines verjüngten Maßſtabes.

Um Linien auf dem Papiere bequem meſſen zu können, hat man dieſen Maßſtab erfunden. Man ziehe Fig 46, ein grade Linie, a y; ſteche ſich auf ſolcher die ohngefähre Länge eines Decimalzolles a b

ab, und theile dieſe in 10 gleiche Theile, ſo werden ſolche, wenn ay, 10 mal ab lang, und ab als 1 Fuß angenommen wird, 10 Zolle ſeyn. Um noch kleinere Theile zu erhalten, ſo errichtet man eine ſenkrechte auf a, b und y, trägt auf ſolcher 10 gleiche willkürliche große Theile auf, und zieht durch ihre Puncte mit ay, Parallelen. Ferner trage man b 1, von c nach d, ebenfalls 10 mal und ziehe d 9, 8.8, 7.7 ꝛc. zuſammen: ſo wird das Dreyeck boc durch die horizontalen Parallelen lauter Zehntel von oc = 1b, = 1 Zoll also Linien abſchneiden; denn im △ boc verhält ſich ja bq : bc = q'p : co; Da nun bq der 10te Theil von bc, ſo muß auch pq das Zehntel von oc, oder von einem Zolle ſeyn. Jeder Zoll iſt alſo wieder in 10 Theile getheilt; und 10 Zoll iſt ab lang, alſo hat man 100 Theile; iſt aber ay wieder 10 mal ab (wie jetzt angenommen) lang, ſo hat man 10.100 = 1000 Theile; daher heißt ein ſolcher Maßſtab auch ein Tauſendtheilichter.

Da in der practiſchen Geometrie große Maße vorkommen, ſo kann man b 1, nur gewöhnlich als eine Ruthe annehmen, und dann iſt pq Statt einer Linie nun 1 Zoll; und die gleichen Theile von ab auf ay, alſo 10 Ruthen Längen, welche man zum bequemen Abnehmen der Maße, wie die Figur ergiebt, bezeichnet. Das Meſſen der Linien und Abnehmen derſelben nach dieſem Maßſtabe, wird nun leicht. Man hätte z. B. zwiſchen die Zirkelſpitzen eine Linie *—* gefaßt, dieſe mäße von 10 bis zum Punct bey der 4ten

*

Ruthe; ſo hätte ſolche alſo nicht volle vier Ruthen, ſondern einleuchtend bloße 10 + 3 = 13 Ruthen, und das Stück von der 3ten Ruthe bis zum Puncte, welches Fuße und Zolle ſeyn müſſen, noch darüber. Die Fuße nun genau zu erfahren, ſo ziehe man den einen Zirkelfuß auf * 10 ſo viel herauf, bis der andere Zirkelfuß, mit ihm auf einer und derſelben horizontalen Parallele, eine von den ſchrägen Linien, welche Transverſalen heißen, berührt. Dieſer Berührungspunct fällt nun entweder gerade zugleich mit auf eine horizontale Parallele, wie hier auf die 6te, und dann zeigt ſolches 6 Schuh an, — die Linie * * mäße alſo 13° 6′ — oder er fiele zwiſchen 2 ſolche Parallelen, und dann mäße er außer den Fußen, welche die untere dieſer 2 Parallelen anzeigte, noch Zolle, welche man nach dem Augenmaße, indem man den Zwiſchenraum in 10 Theile getheilt denkt, ſchätzt. Eine, vom Puncte m zum Puncte n, reichende Linie, mißt nemlich 12° 5′ 5″, von r bis ſ, aber 27° 8′ 9″. Hieraus wird man ſich nun ſelbſt abſtrahiren können, wie man Linien von einem gewiſſen Maße, abnehmen müſſe. Z. B. eine Linie von 12° 5′ 5″, von 10° 5′ 5″ (wie mt) von 27° 8′ 9″ ꝛc.

B. Meſſung der Winkel.

§. 174.

Zieht man, wie Fig. 42, aus dem Scheitelpuncte c, durch die Schenkel des Winkels ecb, einen Kreisbogen, ſo werden demſelben (nach §. 164.) eine gewiſſe Anzahl Grade, Minuten ꝛc. zukommen; da er ein Theil des ganzen, in 360 Grade getheilten Kreiſes iſt; und durchs Zählen dieſer ihm zukommenden Grade ꝛc. kann man alſo ſeine Größe beſtimmen. Zieht man über einer geraden Linie einen Halbkreis, theilt ſolchen in 180 Grad, und bemerkt das Centrum; ſo erhält man, wenn dieſes auf Holz, Meſſing ꝛc. geſchehen iſt, ein Winkelmaßinſtrument, welches wahrſcheinlich wegen ſeines bequemen Gebrauchs zum Winkelabtragen, „Transporteur“ genannt wird. Legt man das Centrum deſſelben an den Scheitelpunct irgend eines Winkels und deſſen einen Schenkel ſcharf an den Durchmeſſer des Kreiſes; ſo wird der andere Schenkel (gehörig verlängert) die Grade des Winkels auf dem Kreisbogen abſchneiden; dieſe finden, heißt nun einen Winkel meſſen.

Auf dieſe Art kann man ſpitze, hohle, ſtumpfe und erhabene Winkel meſſen. Die erſtern drey, findet man durch bloßes Abzählen der Grade, welche der Bogen zwiſchen ihren Schenkeln mißt. Der er-

habene Winkel ergiebt ſich aber durch Berechnung, wenn man den hohlen Winkel mißt, und ſolchen von 360 Grad abzieht. Hält der hohle Winkel 60 Grad, ſo hat ſein erhabener Winkel 300 Grad. Man hat auch Inſtrumente von ganzen, in Grade eingetheilten Kreiſen; durch welche ſolche Winkel ohne Berechnung, gerade wie durch den Transporteur die ſpitzen, hohlen und ſtumpfen gefunden werden: ſie heißen Aſtrolabia.

C. Meſſung und Berechnung des Flächengehalts der Figuren.

§. 175.

Flächen können nur durch Flächen gemeſſen werden (vide §. 99). Man hat daher die Fläche der Quadrat-Figur, zum Flächenmaße angenommen. Nachdem daß ſolches nun zu einer ſeiner Seiten 1 Ruthe, 1 Fuß, Zoll ꝛc. hat, heißt ſolches eine Quadratruthe, ein Quadratfuß ꝛc.

Eine Quadratruthe iſt folglich 1 R lang und 1 R breit; der Quadratfuß, 1 Fuß lang und 1 Fuß breit ꝛc. Eine Längenruthe ins Quadrat erhoben, giebt alſo eine Quadratruthe; ſo der Längenfuß ins Quadrat; 1 Quadratfuß ꝛc.

Könnte man jede Figur wie Fig. 39 und 40. mit lauter an einander gereiheten Quadraten belegen,

ſo ergäbe das Zählen derſelben, wie vielmal ein ſolches Quadrat in der zu meſſenden Figur enthalten ſey; und dieſes hieße, mit dem Quadratmaße ausmeſſen. Da ſolches aber zu mühſam iſt, ſo hat man durch die Verbindung der Rechnung mit der Längenmeſſung, eine kürzere Methode ausgemittelt; welche jetzt in möglichſter Deutlichkeit und Kürze gelehrt werden ſoll.

Mäße man die Länge und Breite des Parallelogramms Fig. 39., (das iſt ab und ac), mit dem Längenmaße ax, ſo würden auf ab u. ac durch dieſes Maß gleiche ax Längen fortgetragen; (auf erſterm 6, auf letzterm 9) und wenn man ſich durch die Puncte des Maßes mit ab und ac Parallelen gezogen denkt, lauter gleich große Quadrate gebildet werden, deren jedes ſo groß als das Quadrat von ax. Es bildet ax, alſo das Quadratmaß; und wäre ax eine Ruthe, ſo wäre ax^2 eine Quadratruthe; und man ſieht, daß wenn die ax 6 mal enthaltende ab mit der ax 9 mal enthaltenden ac, oder 6 mit 9 multiplicirt würde, dann 6.9 = 54 Quadratruthen, ſich ergeben; welche der Flächengehalt vom Parallelogramm abcd ſind.

Ein Parallelogramm wird alſo ausgemeſſen und berechnet, wenn man deſſen Länge und Breite mit irgend einem Maße mißt und in einander multiplicirt.

Ein Dreyeck wird alſo ausgemeſſen und berechnet, wenn man nicht allein deſſe Grundslinie und Höhe mißt, und in einander multiplicirt,

ſondern das Product dann noch durch 2, dividirt; weil jedes Dreyeck die Hälfte ꝛc. Alſo das △ a b d zu berechnen, welches gerade die Hälfte von jenem ſchon berechneten Pallelogramme iſt, giebt eine Probe. Es iſt aber ebenfalls darin die Grundlinie a b = 6, die Höhe = 9; und 6.9 = 54, 54 aber dividirt durch 2, giebt 27, als die richtige Hälfte von 54.

Man kann aber auch die ganze Grundlinie und halbe Höhe, oder die ganze Höhe und halbe Grundlinie nehmen und in einander multipliciren, ohne durch 2 zu dividiren, wenn ſich nemlich die Zahlen dieſer Linien leicht halbiren laſſen. Denn $6.4\frac{1}{2} = 27$ wäre nicht bequem; aber wohl $3.9 = 27$; beydes derſelbe Flächengehalt wie vorhin. Weit vorzüglicher iſt aber überhaupt

Die Berechnung der Dreyecke aus ihrem Umfange,

weil man der ſo unvollkommenen Meſſungen der Linien durch den Zirkel und Maßſtab, wobey man ſehr oft bis auf 2 Zolle ungewiß iſt, dadurch gänzlich überhoben wird. Schon pag. 4 und 5 iſt deren vorläufig erwähnt, und das Verfahren in einer mitgetheilten und aufgelößten Formel gezeigt. Blos das Wurzelzeichen $\surd$, müſſen wir bey der wirklichen Berechnung noch vorſetzen, welches dort abſichtlich weggelaſſen worden iſt.

Als: $\surd(S(S-a)(S-b)(S-c))$.

Wir wollen hier nur eine wirkliche Berechnung eines Dreyecks nach dieſer Formel vornehmen, um

zugleich das abkürzende der Logarithmen wieder in Erinnerung zu bringen. S bedeutet hier ſtets die halbe Summe der 3 Seiten; alſo im △ Fig. 37, $S = \frac{a+b+c}{2}$, oder: da a = 12, b = 9, c = 7, alſo $S = \frac{12+9+7=28}{2} = 14$; S = 14.

Aufloſung.

S—c = 7 = Log. 0.8450980
S—b = 5 = — 0.6989700
S—a = 2 = — 0.3010300
S—, 14 = — 1.1461280
√ 2.9912260
1.4956130 = 31°30′49″ ꝛc. Flächengehalt.

Auch die Höhe eines Dreyecks auf ähnliche Art zu finden, kann ſehr nützlich werden. Mit dem Zirkel würde man ſolche in einem Dreyecke wie Fig 47, für a nur 52′ ſcharf abnehmen können, wir wollen ſolche berechnen, und dieſe Figur mit der Größe ihrer Seiten beybehalten. Die Formel dazu iſt:

$$\frac{\sqrt{((a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c))}}{2a, \text{— wenn a}, \quad 2b, \text{— wenn b}, \quad 2c, \text{— wenn c die angenommene Grundlinie.}}$$

Wir wollen die Höhe für die Grundlinie a ſuchen; alſo d. Nach der Formel ſoll man nun:

1. Alle 3 Seiten addiren alſo a + b + c = 28

2. Von dieſer Summe das Doppelte jeder Seite abziehen; alſo

28 − (2.12) = 4; 28 − (2.10) = 8; 28 (− 2.7) = 14.

3. Dieſe Differenzen mit der ganzen Summe wieder multipliciren; alſo 14.8 4.28; und aus dem Producte

4. die Quadratwurzel extrahiren.

5. Die gefundene Wurzel durch das doppelte der angenommenen Grundlinie dividiren.

Durch Logarithmen berechnet, hat man

$$\begin{array}{ll} a+b+c-2c = \text{Log.} & 1.1461280 \\ a+b+c=2b = \quad - & 1.0000000 \\ a+b+c=2a = \quad - & 0.6020600 \\ a+b+c \quad = \quad - & 1.4471580 \\ \hline \sqrt{} & 4\,1953460 \\ & 2.0976730 \\ a\ 2 \quad = & 1.3802112 \\ \hline & 0.7174618 = 5°2'1''7'''4'''' \\ & = \text{der Höhe.} \end{array}$$

Ein Trapez und Trapezoid wird ausgemeſſen

und berechnet, wenn man ſolche durch eine Diagonal in 2 Dreyecke zerlegt, dieſe berechnet und ſummirt. Die Diagonal kann auch als gemeinſchaftliche Grundlinie angenommen, dann mit der Summe der auf ſie zu fällenden Perpendikel (für die Höhe der Dreyecke) multiplicirt, das Product aber dann durch 2 dividirt werden. Auch kann man die halbe Summe der Perpendikel, und die ganze Grundlinie

oder

oder dieſe halb und jene ganz nehmen, und mit einander multipliciren, wodurch ſich ohne Diviſion durch 2, ebenfalls der Flächengehalt der ganzen Figur ergiebt. Das Trapez kann aber auch folgendermaßen berechnet werden: Man nehme die halbe Summe der beyden Parallelen Seiten deſſelben (Fig. 11, a b, c d) und multiplicire ſolche mit der Höhe, oder nehme die ganze Summe und ganze Höhe und dividire das Product derſelben durch 2. Es ſey Fig. 11, $ab = 8$, $ac = 4$, und $gh = 4$, ſo erhielte man $8 + 4 = 12$, $\frac{12}{2} . 4 = 24$; oder $12.4 = \frac{48}{2} = 24$. Der Beweis iſt leicht zu finden. Durch Zeichnung findet man, daß die Hälfte jener beyden Parallelen die Grundlinie eines gleich großen Rechtecks ſey; Man ziehe durch die halbe Höhe des Trapezes eine Parallele mit der Grundlinie, (hier Fig. 11, e f,) ſo wird ſich ſolche ſo gleich ergeben; ſie iſt die Hälfte einer Linie, welche a b und a c zuſammengeſetzt ergeben. Fällt man durch e und f Perpendikel, ſo iſt der Beweis ſehr leicht zu führen. Man nennt auch, obgleich wohl nicht ganz richtig, e f die mittlere arithmetiſche Proportionallinie, zwiſchen a b und b c; doch wollen wir dieſe Benennung beybehalten.

Da man jede geradlinichte Figur, in Dreyecke, Trapezia oder Trapezoides zerlegen kann: ſo iſt ſchon darinn die Berechnung ihres Flächengehalts mit gegründet. Man berechnet und addirt bloß dieſe ihre Theile.

Eine krumm= oder gemiſchtlinichte Figur

mißt und berechnet man, wenn man ſo nahe als möglich an dem Umfange derſelben, gerade Linien zieht, wie Fig. 48, a b, b c, a d, welche die Krümmen abſchneiden; und von dieſen Linien wieder in jede Hauptkrümme, welche über ihr abgeſchnitten liegt, Perpendikel fallen läßt, ſo, daß die zwiſchen ſolchen liegende und abgeſchnittene Stücke der krummen Linie, faſt für gerade Linien gehalten werden können. Dieſe dadurch erhaltenen Trapezia oder Dreyecke, werden dann wie gewöhnlich gemeſſen, berechnet, und alle von jenen Linien wie a b, b c a d (welche Abſciſſen heißen,) abgeſchnittene Stücke 1.2.3 .... 13, zu der Summe der übrigen Theile als hier A und B addirt, die an = oder zu = geſchnittenen Stücke, wie 14, 15, aber von der Summe abgezogen. A und B halte 20 R, die 13 Stück aber 8 Ruthen, ſo addirt man 20 + 8 = 28; die Stücke 14 und 15 halten 2 R, ſo zieht man ſolche von 28° ab; alſo 28° — 2° = 26 Ruthen; als der ganze Flächengehalt. Die Perpendikel, welche von den Abſciſſen gefällt werden, heißen Ordinaten.

Die Berechnung der Kreisfläche,

wird aus nachſtehendem ſich ergeben.

Ein aus dem Mittelpuncte, wie Fig. 6, in lauter gleiche Dreyecke getheiltes regulaires Vieleck, kann unverkennbar durch ſeine Dreyecke berechnet werden. Dieſe haben, da ſie alle congruent ſind,

auch gleiche Grundlinien und Höhen, und die Summe aller ihrer Grundlinien in die halbe Höhe multiplicirt, ergiebt ihren Flächengehalt. Da nun die Kreisfläche, als ein regulaires Vieleck von unendlichen vielen Seiten angeſehen werden kann, in welchem alſo wie vorhin, die Höhe der Dreyecke eine ſenkrechte, aus dem Centro durch die *Mitte* derſelben, und wegen der unendlich kleinen Grundlinie, für den *Halbmeſſer* genommen werden kann, ſo folgt, daß der Halbmeſſer als die *ganze Höhe* halb genommen, mit der Peripherie als der Summe der kleinen Grundlinien multiplicirt, den Inhalt der Kreisfläche ergeben.

Alſo der *halbe* Halbmeſſer mit der ganzen Peripherie multiplicirt, giebt den Flächengehalt. Man kann auch den *ganzen* Durchmeſſer mit der Peripherie multipliciren, und das Product durch 4 dividiren. Der Diameter eines Kreiſes ſey 100, alſo die Peripherie 314; ſo iſt die Kreisfläche

$314.25 = 7850$; u. $\frac{314.100}{4} = 7850$.

Vergleicht man das Quadrat des Durchmeſſers mit der Zahl der Fläche, ſo wird man finden, daß ſich ſolche wie 10000 : 7850, oder 1000 : 785 verhalte. Man kann alſo auch den Flächengehalt auf die Art finden, wenn man ſagt 1000 : 785 wie das Quadrat des Durchmeſſers der zu berechnenden Kreisfläche. Iſt der Durchmeſſer 100, ſo hat man $1000 : 785 = 10000 : x$, und ergiebt ſich 7850 wie

vorhin. Statt jenes Verhältniſſes, kann man auch 14:11, und 452:355, gebrauchen.]

Ein Kreisausſchnitt, Sector, wird ſo berechnet,

wenn man ſetzt, „ſo wie ſich die Peripherie ſeines Kreiſes (360°) zu ſeinem Bogen (in Graden, Minuten ꝛc.) verhält, ſo verhält ſich der ganze Flächengehalt des Kreiſes, zu der Fläche dieſes Ausſchnitts.“ Alſo die Grade ꝛc. des Bogens des Sectors, und die ganze Kreisfläche, müſſen zuvor geſucht werden. Der Bogen meſſe 5 Grad, die ganze Fläche halte 12 Ruthen, ſo ſagt man

$$\begin{array}{c|c} 360 & 5 \\ * & 12 \end{array}\Big\} = \frac{60^\circ}{360} = \frac{1}{6} \text{ Ruthe.}$$

Ein Kreisabſchnitt, Segment, wird auf die Art berechnet, daß man zuerſt daſſelbe zu ſeinem Sector ergänzt, dieſen wie bekannt berechnet und von ſolchem, das in demſelben über der Sehne befindliche Dreyeck, mit ſeinem Flächengehalte, abzieht. Fig. 5. ergänze man das Segment y, zu ſeinem Sector b c f und berechne denſelben; — ſein Inhalt ſey 12 — nun berechne man auch △ b c f, (dieſes halte 8) und ziehe ſolches vom ganzen Inhalte ab, ſo bleibt das Stück in ſeiner Flächengröße dargeſtellt, übrig. — Alſo 12 — 8 = 4, der Flächengehalt. Manchem wäre es vielleicht angenehm, auch die Länge eines Bogens, wie b f, berechnen zu können; für dieſen ganz in der Kürze, daß ſich der ganze Kreis in Graden zu dem Bogenſtücke in

Graden, wie die ganze Länge der Peripherie, zu der zu ſuchenden Länge des Bogens, verhalte. Grade des Bogens und die Länge der ganzen Peripherie, müſſen alſo zuvor bekannt ſeyn.

Der Bogen halte 6 Grad, die Länge der Peripherie 24 Ruthen, alſo $\begin{array}{r|l} 360 & 6 \\ * & 24 \end{array} \Big\} \frac{144}{360} = \frac{2}{5}$ Ruthen.

Umgekehrt findet man auch aus der bek. Länge des Bogens und der Peripherie, deſſen Grade; die Länge beyder, ſey 24 und $\frac{2}{5}$ Ruthen, alſo

$$\begin{array}{r|l} 24 & \\ (5) & 360 \\ * & \end{array} \frac{2720}{120} = 6$$ Grad, wie vorhin.

§. 176.

Reducirung des Flächen- oder Quadratmaßes.

Auch hier wird alles Geſagte bloß vom Decimalmaße gelten, da nur dieſes (wenigſtens faſt ohne Ausnahme) bey Flächenmeſſungen vorkömmt. Es kann aber auch jeder, der das Vorhergehende der Reduction und das gegenwärtig zu Lehrende gefaßt hat, auch Decimal und Duodecimalquadratmaß - Reductionen, ohne weitere Anleitung und ohne Schwierigkeiten zu finden, vornehmen.

Das Ruthenmaß iſt bekanntlich ſehr verſchie-

den, und man muß daher beym Reduciren auf folgendes Rückſicht nehmen:

1. Ob das zu reducirende Ruthenmaß, mit demjenigen, auf welches daſſelbe reducirt werden ſoll, einerley oder
2. verſchiedenes Grundmaß habe.

Beyſpiele werden die ganze Reduction am kürzeſten erläutern.

Ad 1.

Daß ſich die Längen-Ruthen, wie die Anzahl Fuße des Gradmaßes, woraus ſolche zuſammen geſetzt ſind, verhalten, ſo verhalten ſich auch die Quadrat-Ruthen, wie die Quadratzahlen ſolcher Fuße; ſo zum Beyſpiel die 14ſchuh. Quadratruthe zur 16ſchuhigten, wie 14.14 : 16.16;
oder 7.7 : 8.8;

folglich wären 49 ſechszehnſch. Quadratruthen = 64 vierzehnſchuhigten. Sollten alſo 308 G. R. 14 ſchuhigten Quadratmaßes, in 16 ſchuhigten Maße erforſcht werden, ſo ſetzt man

$$\begin{array}{r|l} 64 & 49 \\ * & 308 \end{array} = 235\tfrac{13}{16} \text{ Ruthen.}$$

Ad 2.

Iſt das Grundmaß verſchieden, aus welchem ſich die Quadratruthen bildeten; ſo ſucht man zuerſt die nöthigen Verhältniſſe für beyde Grundfußmaße in der Tafel auf, und beſtimmt daraus das Längenruthenmaß von einerley ſchuhigtem Maße; erhebt beyde

ſolche Längenruthen ins Quadrat, um das Quadratmaß zu erhalten, und berechnet dann wie ſonſt. Wie viel ſind z. B. 308 Goth. 14 Sch. Quadratruthen in Ohrdruffer 14 und 16 ſchuhigten?

Aus 1275 : 1234 zuerſt bekannten die 14 ſchuh. Längenruthe beyder Maßen gegen einander; 100000 Gothaiſch. = 1°0′3″3‴2⁗ Ohrdruffer.

Dieſe Längenruthen ins Quadrat erhoben, geben 1°00′00″00‴00⁗ = 1°06′75″02‴24⁗ hiernach ſucht man nun, wieviel 308 Goth. 14 ſchuh. in Ohrdruff. 14 ſchuh. Quadratruthen betragen; und ſetzt

1°00′00″00‴ | 1°06′75″02‴ }
* | 308°00′00″00‴ } Fac. 328°79′06″

Nota. Je mehr Ziffern man von den Quadratzahlen nimmt, deſto genauer erhält man das Reſultat. Bis zu Linien muß man wenigſtens gehn.

Da man nun weiß, daß 308 Goth. 14 ſchuh. R. = 328°79′ ꝛc. Ohrdr. 14 ſch., ſo kann man nach Nr. 1. die letztern leicht in 16 ſchuhichte verwandeln, um zu erfahren, wie viel 308 Goth. 14 ſchuh. in Ohrdr. 16 ſchuh. betragen

als 64 | 49 } = 251 R. 72 Fuß. Ohrdr. 16 ſchuh. =
* | 32879 } 308 R. Goth. 14 ſchuh.

Ich habe neben die berechneten Längenruthen-Verhältniſſe, zugleich deren Quadrate hinzugeſetzt;

theils um Anfänger auf den Nutzen ſolcher Berechnungen aufmerkſam zu machen, theils ihnen Probebeyſpiele zu geben.

Fig. 49, ſieht man gf als eine 16 ſchuh. Längenruthe eingetheilt wie von ſolcher von g—q, 8 Fuß, und von gr, 8°7′5″ ſechszehnſchuh. Decimal-Eintheilung, ſo groß als eine 14 ſchuhigte Ruthe ef = gr; und daß obige 16 ſchuhigte 8′7″5‴ ins Quadrat erhoben, eine ſo große Quadrat-Fläche, als die 10′ oder 1°0′ der Ruthe ef geben. Es iſt ef genau aus ſolchen 14, als gf aus 16 Theilen zuſammengeſetzt, um den Anfänger ſolches möglichſt leicht überzeugend zu machen.

Reduction des Ackergemäßes.

Um die Größe einer Fläche noch bequemer und kürzer angeben zu können als durch Ruthen, ſo bezeichnete man ein Stück von einer gewiſſen Anzahl Ruthen, mit dem Namen Acker, oder Morgen; aus mehrern Morgen ſetzte man wieder ſogenannte Hufen zuſammen ꝛc. Sind aber dergleichen Gemäße auf einander zu reduciren, ſo gelten alle die Grundſätze, nach welchen die Ruthenmaße reducirt wurden; man verwandle ſolche nur in Ruthen. Wie viel ſind z. B. 3 Goth. Hufen Ohrdruffer Gemäßes; wenn die Goth. Hufe, wie die Ohrdruffer, 30 Acker, und jeder Acker 160 Quadratruthen 14 ſchuhigte, enthält? Man überlege, daß

3 Hufen 90 Acker = 14400 Ruthen; da nun 1 Goth. R. = 1°06′75″ Ohrdruffer Maßes, wie

viel 14400 Ruthen Goth.? Antwort 15372° = 8 Hufen, 6 Acker, 1 Ruthe.

Auf der beygefügten kleinen Verhältnißtafel der Fußmaßen, habe ich auch die Größe einiger Ackergemäße, bemerkt.

5. Verwandlung und Eintheilung der Figuren.

A. Verwandlung derſelben.

§. 177.

Dieſe ganze Abtheilung, iſt für den practiſchen Geometer äußerſt wichtig. Hier können nur bloß ſolche Bruchſtücke mitgetheilt werden, welche den Vorkenntniſſen angehender Geometer angemeſſen, und für ihre geometriſchen Geſchäftsbeſorgungen, zureichend ſind.

1. Ein Dreyeck in ein Rechteck zu verwandeln, und umgekehrt.

Zuerſt wird der Flächengehalt des Dreyecks berechnet; und ſoll das Rechteck ein Quadrat ſeyn, dann bloß die Quadratwurzel aus ſolchem extrahirt, welches ſogleich die eine Seite des Quadrats ergiebt. Fig. 50 hält △ a b c, 36 Quadratruthen, welches künftig durch □, alſo 36 □ Ruthen, ausgedrückt werden ſoll; und $\sqrt{36} = 6$, alſo

wird die Seite eines gleich großen Quadrats, 6 Ruthen lang, genommen werden müſſen. Fig. 51. a b c d iſt alſo = Fig. 50. a b c. Iſt das Rechteck aber ein Parallelogramm, ſo wird mit der, zu ſolchem etwa gegebenen Grundlinie oder Breite, in jene Fläche dividirt, der Quotient giebt dann das Fehlende. Fig. 52 a b c d wird alſo bey a b = 9 und b d = 4, und daher Fig. 50., △ a b c gleich ſeyn; denn 9, ſey als Grundlinie gegeben, alſo $\frac{36}{9}=4$ zur Breite; wäre 12 gegeben, ſo wäre 3 die Breite ꝛc.

Die Richtigkeit dieſer Verwandlung kann man ſich leicht durch Anwendung des Satzes, „daß ein „Dreyeck die Hälfte eines Parallelogramms ſey, „welches gleiche Grundlinie und Höhe mit ihm hat", beweiſen; und eben ſo leicht wird es auch werden, ein Rechteck nun in ein gleich großes Dreyeck zu verwandeln.

2. Eine Kreisfläche in ein Quadrat zu verwandeln, und umgekehrt.

Aus der Berechnung der regulairen Vielecke und Kreisflächen, läßt ſich ſehr leicht abſtrahiren, daß wenn man aus dem Umfange eines regulairen Polygons, die Grundlinie, und die Höhe der durch Radien in ſolchem gebildeten Dreyecke (wie Fig. 6) zur Höhe eines Dreyecks nimmt, das daher entſtandene Dreyeck ſo groß, als das Polygon ſelbſt ſeyn müſſe; folglich eines Kreiſes Quadratfläche, gleich ſey der Fläche eines Dreyecks, deſſen Grundlinie die Peri-

pherie, und deſſen Höhe der Halbmeſſer deſſelben Kreiſes ſind. Man berechne daher hier die Kreisfläche und extrahire aus ſolcher die Quadratwurzel, ſo ergiebt ſich ſogleich die Seite eines Quadrats von gleichem Inhalte; und dieſes nennt man einen Cirkel-Quadriren, daher die berühmte Quadratur des Cirkels, welche nemlich das Bemühen mehrerer Mathematik Befliſſenen zum Gegenſtande hatte, „den „Flächengehalt des Cirkels genau in ein Quadrat zu „verwandeln"; welches, da die vollkommene Beſtimmung der Kreislinie nicht möglich iſt, auf dieſem Wege und wohl überhaupt niemals erreicht werden wird. Da man die Kreislinie aber ſo genau als man will, ſuchen kann, ſo kann man auch dieſe Verwandlung bis zu einem jeden beliebigen Grade der Genauigkeit treiben, und entbehrt man daher bey dem Mangel einer vollkommenen Quadratur, im Geſchäftsleben gar nichts.

Iſt daher die Kreisfläche 144 □ Ruthen ſo wird $\sqrt{144} = 12$ Ruthen, oder die Seite eines Quadrats ſeyn, welches ohne alle merkliche und nachtheilige Fehler, eben ſo groß iſt. Das Quadrat kann nun wieder nach dem Vorhergehenden leicht in ein Dreyeck ꝛc. verwandelt werden. Auch kann man ſogleich aus der bekannten Kreisfläche, ein gleich großes Dreyeck durch Rechnung und Zeichnung finden. Für das erſtere dividirt man mit einer beliebigen Grundlinie in den Flächengehalt und duplirt den Quotienten; welches Duplum nun die Höhe iſt. Oder man ziehe ſich (für das letzte, die Zeich-

nung;) eine Linie, ſo lang, als die Peripherie; und errichte aus dem Endpuncte, oder ſonſt auf derſelben, eine ſenkrechte Linie, ſo lang als der Halbmeſſer; ſo wird ein, durch Verbindung der Endpuncte dieſer Linien gebildetes Dreyeck, wie Fig. 53. △acb oder △aeb gleiche Flächen-Größe mit jenem Kreiſe haben.

3. Eine Figur welche einwärtsgehende Winkel, oder vielmehr äußere hohle Winkel hat, in eine gleich große mit ausgehenden oder äußern erhabenen Winkeln, zu verwandeln.

Dieſe Aufgabe iſt äußerſt wichtig, da dieſelbe bey Regulirung der Grenzen, ſehr häufig vorkömmt und nützlich wird.

Fig. 54. ſoll ein Beyſpiel dafür geben. Man verbinde die 2 nächſten äußern Puncte, z. B. ac, durch eine Linie, ziehe zu ſolcher aus b, die Parallele bl, und wo dieſelbe die Linie ak trifft, nemlich in l ziehe man cl; dadurch ergiebt ſich Statt kabc, nun klc; ohne die Größe der Figur dadurch zu ändern. Denn △lbc=△lba, wegen gleicher Grundlinie und Höhe; und △lbx iſt beyden gemeinſchaftlich, alſo cbx = alx. — Das abgeſchnittene und wieder angeſchnittene Stück, alſo gleich groß. Eben ſo verfährt man bey den Winkeln cde, fgh, ikl, wie die Zeichnung ergiebt. Man muß nur ein für allemal merken, „daß

die, von des einwärts gehenden Winkels Scheitelpuncte zu ziehende Parallele, ſtets an dem einen Schenkel desjenigen Winkels, welchen die äußere Parallele rechts oder links an einer Seite der Figur trifft, gezogen werden müſſe. So iſt deshalb bl auf ak, welche Linie mit ba einen Winkel bildete ꝛc. gezogen. Die ganze Figur erhält nun die Geſtalt, lcmnho; und iſt in lauter ausgehenden Winkeln = abcdefghikl.

Noch iſt aber der Fall übrig; was man thun müſſe, wenn wie Fig. 55, die zu ac zu ziehende Parallele, keinen der Schenkel, welche an die äußern Parallelen anſtoßen, hier alſo ſo wenig ah als cd treffen. Dann verbinde man 2 Puncte innerhalb der Figur, ſo hier die Puncte bd, ziehe zu dieſer Linie die Parallele ci, und von i eine Linie nach d; ſo erhält man für ∟abc, den ∟edi. Um nun auch ∟aid umzuformen, verbinde man a und d, und ziehe dazu die Parallele ik, und dann ak, ſo iſt auch dieſe Abſicht erreicht. Bey dem ∟g, verfährt man wie gewöhnlich, und die Figur iſt nun akelh, Statt abcdefgh. Wie einfach ſind alſo Fig. 54 und 55, ohne Veränderung ihrer Größe hergeſtellt.

Anfänger müſſen ſich in der Auflöſung dieſer nützlichen Aufgabe, ja möglichſte Gewandtheit zu erwerben ſuchen.

4. Ein Viereck, Fünfeck ꝛc. in ein Dreyeck zu verwandeln.

Iſt keine Seite oder Winkel dazu bey zubehalten,

vorgeſchrieben; ſo dividirt man mit einer willkürlichen Zahl einer Grundlinie, in den Flächengehalt der zu verwandelnden Figur, und duplirt den Quotienten, welches die Höhe eines gleich großen Dreyecks giebt. Z. B. ein 4eck halte 48 □ Ruthen; alſo mit der willkürlichen Zahl 6 dividirt, giebt 8, und 2.8 = 16. Ein Dreyeck, deſſen Grundlinie alſo 6 R. deſſen Höhe = 16, iſt ſo groß als das 48 □ Ruth. haltende Viereck.

Wäre aber, wie Fig 56, eine Seite und Winkel, hier nemlich ab und ∟abd beyzubehalten; ſo verbinde man, wie in dieſem Falle gelehrt werden ſoll, a mit d, und ziehe dazu von c die Parallele ce; der durch Verlängerung von bd in e ſich auf ce abſchneidende Punct, ergiebt durch ae und be, das geſuchte Dreyeck; den △ade = △adc, und △ acd ergänzt ja △abd zum Viereck abcd; und △abd bleibt auch im △abe. Alſo △abe = Viereck abcd.

Soll ein Fünfeck ꝛc. mit gegebener Seite und Winkel auf ein Dreyeck gebracht werden: ſo verfährt man auf eine ähnliche Art. Z. B. Fig. 57. iſt ein 5eck, dieſes verwandelt man erſt in ein 4eck, indem man nach der Zeichnung c und e verbindet, dazu durch d eine Parallele zieht, und ac bis zu ſolcher verlängert. feba wird dann als 4eck = abcde ſeyn, denn △cfe = △cde. Aus dem Vierecke bildet man nun nach dem Vorhergehenden ein Dreyeck. So kann man von einem 10eck zum 9eck

dann zum 8eck, 7eck, 6eck ꝛc. bis zum Dreyeck herabſteigen.

Hat die Figur eingehende Winkel, ſo ſchafft man ſolche wie bekannt in eine Figur mit ausgehenden Winkeln zuvor um. —

5. Ein Dreyeck in ein Trapez mit Beybehaltung der Grundlinie, und eines an derſelben liegenden, und eines 2ten gegebenen Winkels zu verwandeln.

Es ſey das Dreyeck a b c Fig. 58. zu verwandeln a b und ∟ c a b beyzubehalten, ∟ a b d aber gegeben. Man ziehe zu a b die Parallele c d, meſſe ſolche, multiplicire a b mit c d, und extrahire aus dieſem Producte die Quadratwurzel. a b ſey = 16°, c d = 20°, alſo 16.20 = 320°; und $\sqrt{320°}$ = 17°8′8″.

Dieſes iſt die 2te Linie des zu ſuchenden Trapezes, e f, welche mit der Grundlinie a b parallel läuft. Um ſolche nun ziehen zu können, ſo addire man das Maß von e f und a b = 33°8′8″, halbire ſolches, und dividire mit der erhaltenen Zahl in den Flächengehalt des Dreyecks a b c; alſo in 64 □ Ruthen, ſo erhält man die Höhe des Trapezes, nemlich hier 3°7′7″. Nun errichte man willkürlich auf a b eine ſenkrechte z. B. g h, und ſetze 3°7′7″ der gefundenen Höhe, auf ſolcher ab; ſo wird eine durch den Höhenpunct mit der Grundlinie gezogene Parallele

= e f, und das Δ a b c, in das gleich große Trapez a b c d, verwandelt ſeyn. Dieſe Art Dreyecke in Trapeze zu verwandeln, hat wegen ihrer Allgemeinheit, und daß zugleich 2 parallele Seiten dabey erhalten werden, vor allen bekannten Methoden den Vorzug, und iſt in Rückſicht der Eintheilung der Figuren, des Abſchneidens gewiſſer Stücke ꝛc. von großer Wichtigkeit.

B. Eintheilung der Figuren.

§. 179.

Die Hauptfiguren, welche hier einer beſondern Berückſichtigung verdienen, ſind das Dreyeck, Parallelogramm und Trapez. Alſo zuerſt von der

Eintheilung der Dreyecke.

1. Wenn die Theilungslinien in einen Winkel des Umfangs fallen ſollen.

Dabey muß man wieder berückſichtigen, ob die Theile gleich, oder ungleich groß ſeyn ſollen. Im erſten Falle, theile man die jener Spitze gegenüber befindliche Linie, in ſo viele gleiche Theile, als die Zahl der Theile betragen ſoll; und ziehe von jedem Puncte eine Linie in die gemeinſchaftliche Spitze. Z. B. Dreyeck a b c Fig. 59. in 4 gleiche Theile; ſo theilt man a b in 4 gleiche Theile und zieht die Theilungslinie wie die Vorſchrift und Zeichnung ergiebt. Daß ein Theil ſo groß als der andere ſeyn

müſſe, kann man ſich durch eine zu a b gezogene Parallele d e überzeugen, da alle gleiche Höhe wie b e und eine gleiche Grundlinie haben. Sollen die Theile ungleich ſeyn: ſo läßt man die Aufgabe durch Beherzigung des 3ten Lehrſatzes, §. 158. Und ſage, der ganze Flächengehalt des Dreyecks, hat die ganze Grundlinie zur Baſis; eine wie große Grundlinie wird ein Stück von dem gegebenen Gehalte haben? Das Dreyeck Fig. 60 halte z. B. 72 □ Ruthen, und die Grundlinie a b = 24; und ſolle in 3 Theile getheilt werden; nemlich ein Stück ſolle 24 □ Ruthen, ein Stück 36 □ Ruthen und ein Stück 12 □ Ruthen enthalten. Alſo 72° geben 24°0′0″, wie viel 24°, 36°. Folglich

72 | 2400 } 8 Ruthen || und 72 | 24 } 20 Ruthen. —
x | 24 || x | 60

Man ſchlägt nemlich 24 und 36 zuſammen um aus ein und demſelben Puncte die Maßen abſetzen zu können (darüber in der practiſchen Geometrie ein Mehreres) wodurch Fehler im Abſetzen vermieden werden. Dieſe gefundene Maße trägt man nun aus a nach d und e auf, und zieht c d und c e, ſo wird △ a c d = 24 □ Ruthen, △ c d e = 36 □ Ruthen und △ b c e = 12 Ruthen enthalten.

2. Wenn die Theilungs-Linien innerhalb oder auf einem der Schenkel des Dreyecks in einem Puncte zuſammenlaufen ſollen.

Als Vorbereitung dazu, dient: daß man ein Dreyeck von jedem Inhalte abſchneiden lernt.

Vom Trapez Fig. 61. a b g h, ſoll über der Grundlinie a b, ein Stück von 12 Ruthen abgeſchnitten werden. Man dividire mit der Grundlinie 10°3′ in obige 12 □ Ruthen, welche man vorher zu Fußen, Zollen ꝛc. macht, und erhält zum Quotienten.

12000000 | 1°1′6″5‴0;
103....
170....
103....
670...
103...
618...
520..
103..
515.
50

Dieſes würde die Breite eines Parallelogramms, welches obige Grundlinie a b = 10°3′ hätte, und wirklich 12 □ Ruthen hielte, ſeyn.

Da dieſes aber zwiſchen den nicht parallelen Schenkeln a g und b h, nicht errichtet werden kann, ſo duplire man die Breite deſſelben, um dadurch die Höhe eines gleich großen Dreyecks über a b zu erhalten; denn da ein Dreyeck von einem Parallelogramme von gleicher Höhe über derſelben Grundlinie erſt die Hälfte iſt, ſo muß, um die ganze Größe zu erhalten, auch die Höhe doppelt ſo groß genommen werden; folglich 1°1′6″5‴.2 = 23′3″0.

Dieſe Höhe ſetze man aus a nach c, auf eine ſenkrechte Linie; bringe den Punct c durch eine Paral-

lele mit a b, auf den Schenkel a g, nach d und ziehe d b, ſo wird △ a b d 12 □ Ruthen enthalten; zur Probe kann ſolches berechnet werden. $\frac{10°3'0''}{2} = 5°1'5''$, $5°1'5''.2°3'3'' = 11°99'95''$; fehlen alſo nur 5 □ Zoll, welches darinn liegt, daß die Höhe nicht in Linien ꝛc. abgetragen werden kann, weil ſolche bey dem kleinen Maßſtabe ſchon dem Geſichte entſchwinden. Wünſchte man über d b noch ein eben ſo großes Dreyeck zu zeichnen, ſo muß d b als gemeinſchaftliche Grundlinie zwiſchen △ a d b und dem noch zu zeichnenden angeſehn und dieſes letztere, eine gleiche Höhe, als das erſtere erhalten. Die Höhe des △ a d b aber wenn d b Grundlinie iſt, ergiebt ſich, wenn aus der, dieſer Linie gegenüberliegenden Winkelſpitze, auf ſolche (im Nothfalle kann man d b dazu verlängern) ein Perpendikel gefällt wird. Einen gleich langen Perpendikel errichtet man nun auf d b nach g h zu, z. B. b e; bringt deſſen Endpunct durch eine Parallele mit d b nach f, und zieht d f; ſo iſt △ d b f = △ a d b, denn beyde haben gleiche Grundlinie und Höhe. Hätte über d b ein größeres oder kleineres Stück als △ a d b abgeſchnitten werden ſollen; ſo hätte d b gemeſſen und mit dem Maß in die abzuſchneidende Ruthenzahl, dividirt, der gefundene Quotient aber mit 2 multiplicirt, und übrigens ferner ganz ſo, wie bey beyden △ a d b und △ d b e verfahren werden müſſen. Nun werden auch folgende Theilungen erläutert und verſtändlich gemacht werden können.

a. Wenn der gemeinſchaftliche Punct auf einer, der Seiten des Dreyecks iſt.

Das △ a b c Fig. 62., enthalte 249 □ Ruthen; und o auf b c, ſey ein Brunnen, zu welchem 4 Theilhaber an dem Dreyecke, wenn jedem ſein Antheil zugetheilt würde, jeder von ſeinem Stücke ſoll kommen können. A, ſoll 80 □ R., B, 66 □ R., C, 45 □ R., D, 58 □ R. zugetheilt erhalten; wie muß und kann ſolches geſchehen?

Man ziehe aufs Geradewohl vom o Mittelpuncte nach a eine Linie, und berechne das △ a o c; man findet ſolches 97°, folglich wenn A daſelbſt befriedigt werden ſoll, ſo iſt das Stück 17 □ R. zu groß. Dieſe ſchneidet man daher wieder ab; indem man mit a o = 22° 3′ in 17° dividirt, den Quotienten duplirt, und mit 1° 5′ 2″, von a nach x ſenkrecht abſetzt, ſolche von x nach y durch eine Parellele bringt, und y o zieht; wie ſolches vorhin gelehrt iſt; ſo hat A ſeinen Antheil; denn das △ y o c = 80 □ R. Nun bekömmt B zuerſt das △ y o a = 12 □ R.; und müſſen zu ſolchen noch 49 □ Ruthen, weil er 66 □ Ruthen bekommen ſoll, hinzugeſchnitten werden. Mit a o = 22° 5′ in 49° dividirt ꝛc. ergiebt die Höhe des Dreyecks von 49 R., zu 4° 3′ 9″; dieſe ſenkrecht auf a o aus a geſetzt, und nach d gebracht giebt durch d o einen Abſchnitt für B, welcher in d o y a, 66 □ R. enthält.

Nun kann man für C über d o 45 □ R. oder für D über b o, 58 □ R. auf eine ähnliche Art

abſchneiden, ſo bleibt der 4te Theil von ſelbſt übrig, und man erhält die Theilungslinie e o. Jetzt kann jeder Theilhaber von ſeinem Grundſtücke zum Brunnen kommen.

b. Wenn der gemeinſchaftliche Punct innerhalb des Dreyecks iſt.

Das △ a b c halte 82°80′; o ſey der Brunnen; A B C, wären 3 Intereſſenten, welche △ a b c in 3 gleiche Theile alſo getheilt haben wollten, daß jeder von ſeinem Stück zum Brunnen kommen könnte.

Man ziehe a o und c o: und berechne ſolches; da daſſelbe nur 13°75 hält, und jeder Intereſſent 27°60′ erhalten ſoll; ſo werden 13°85′ noch hinzu geſchnitten. Man mißt z. B. c o, welches 6°2′, dividirt damit in 13°85′, ꝛc. und zieht c d, ſo hält a o d c, 27°60′. Nun zieht man von o nach b eine Linie, berechnet das △ o b d, und da ſolches nur 24°85′ enthält, ſo werden 2°73′ hinzu geſchnitten durch △ o e b; nun hält o e b d ebenfalls ſeine 27°60′, und alſo △ a o e ſchon als Reſt desgleichen. — Solche Theilungen kommen öfters vor. —

§. 180.

Eintheilung der Parallelogramme.

Dieſe iſt ſehr leicht; mögen ſolche Figuren recht oder ſchiefwinklicht ſeyn. Sollen nemlich die Theile

gleich groß ſey, ſo theilt man die beyden gegenüberſte⸗ henden Seiten zwiſchen welchen getheilt werden ſoll, in die vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile und zieht die Puncte zuſammen. Die Theile müſſen, da ſie gleiche Grundlinie und Höhe haben, einander gleich ſeyn, z. B. 64 in 4 gleiche Theile. Sind aber un⸗ gleiche Theile vorgeſchrieben, ſo kann man die Thei⸗ lung nach dem 3ten Lehrſatze, §. 158., folgern und beweiſen; man ſagt, der ganze Flächengehalt des zu theilenden Stückes hat die ganze Grundlinie deſſel⸗ ben von N Größe, eine wie große Grundlinie hat das abzuſchneidende kleine Stück? Fig 65, welche 27 □ R. und die Grundlinie 8° 5′ enthält, nun in 3 Theile, von 10, 9, 8 Ruthen einzutheilen, ſagt man,

27 | 85 } u. nun 10 u. 9 zuſam.
* | 10 }
Fac. 3° 1′ 4″ geſchlagen = 19

27 | 85 } u. ſetzt die 3° 1′ 4″
* | 19 }
Fac. 5° 9′ 4″ von a nach

b und von c nach d; eben ſo die 5° 9′ 4″ von a nach e und von c nach f.

Hätte man die Grundlinien einzeln berechnet, ſo würden 314 + 283 + 259 = 8° 5′ 6″ in Theilen der Grundlinien, folglich für a g ſich 6″ zu viel ergeben haben, welche durchs Zuſammenſchlagen von dem 10ten und 9ten Stück, ſchon um 3″ vermindert, und wenn man, welches hier jederzeit nützlich iſt, die Grundlinie bis zu Linien aufſucht, faſt ganz mit a g gleich. Man kann auch, welches wohl zu bemerken, die übrigen 3 Zoll vertheilen, und jedem Stücke 1 Zoll Länge der Grundlinie, beym Abſetzen

weniger geben. Noch beſſer, und bey größern Vermeſſungen iſt es aber unumgänglich nothwendig, dieſe Vertheilung nach Verhältniß jedes Theils zum Ganzen vorzunehmen. Z. B. 853 ſoll 3″ verlieren wie viel muß 3°1′4″, oder 5°9′4′ verlieren? Antwort. Die erſtern 1″1‴, die letztern 2″.

Läge Fig. 66, bey x oder y, ein Brunnen, zu welchen 2 Intereſſenten, wenn a b c d in 2 gleiche Theile getheilt werden ſollte, ein Jeder von ſeinem Grundſtücke wollte kommen können; ſo zieht man 2 Diagonalen a d, c b, und von der Mitte des Brunnens durch den Durchſchnittspunct e oder y e g, ſo iſt die Theilung geſchehen. Dieſes wird Statt finden, der Brunnen mag ſelbſt auf dem Umfange liegen, oder wo er will, nur muß die Theilungslinie ſtets durch e, welches der Mittelpunct der Figur iſt, gezogen werden. Sollen 3, 4, ... Theile in a b c d, mit Berückſichtigung des Brunnens, abgetheilt werden, ſo geſchieht ſolches wie beym Dreyecke, durch Ab- und Zuſchneiden, wobey ſtets die Spitze eines Theils ſich in der Mitte des Brunnens endigt.

§. 181.

Eintheilung der Trapezen und Trapezoiden.

Die erſtern können als Stücke, welche von einem Dreyecke abgeſchnitten worden ſind, angeſehn,

und ganz ſo, wie jene eingetheilt werden; einige Abweichungen ſind unbedeutend.

Soll ein Trapez in gleich große Theile getheilt werden, ſo daß die Theilungslinien von einer Parallele zur andern gehen, ſo theilt man (wie beym Parallelogramme) bloß dieſe letztern in die verlangte Anzahl gleicher Theile, und zieht die Puncte zuſammen. Fig. 59. ergiebt ſolches im △ abc, das Trapez abfg, deutlich. — Man ſuche den §. 153, vollkommen hierauf und auf folgendes anwenden und benutzen zu lernen. Sollen nemlich die Theile ungleich ausfallen, ſo ſucht man die Grundlinien durch Verhältnißrechnung, wie in den Dreyecken; Fig. 60. iſt das Trapez abfg unverkennbar ein Stück vom △abc; und von den gefundenen Puncten d und e nach c gezogen, ſind auf fg die ebenfalls mit dem Flächengehalte der Theile und des Ganzen im Verhältniß ſtehende Stücke fh, hi, ig abgeſchnitten; dieſe könnte man alſo durch bloße Zeichnung finden, wenn af und bg bis zum Schneidepuncte c verlängert, und dann dc, ec gezogen würden. Iſt fg beträchtlich kürzer als ab, ſo iſt jene Verlängerung von af, bg leicht möglich; im entgegengeſetzten Falle aber unmöglich oder zu mühſam; und allgemein anzurathen, auch fh hi, ig, auf dieſelbe Art durch Berechnung zu ſuchen; wodurch das trügliche Meſſen der Linien vermieden wird.

Es halte (angenommen) abfg, 462 R., und ſolle in 2 Theile von 200 und 262 R. die Thei-

lungslinie durch a b und f g, geführt, getheilt werden; ſo findet man a d und f c, indem man ſetzt:

462	48	und	462	29
*	200		x	200

Fac 20° 7′ 7″ 8‴, für a d) Fac. 125° 5″ 5‴ für f c.

Sollen die Theilungslinien aber zwiſchen den Parallelen, das iſt, von einer nicht parallelen Seite zur andern laufen, ſo gilt auch alles Nachfolgende, was darüber geſagt und gelehrt werden wird, zugleich für die Trapezoiden mit; und ſo frägt ſichs, ob ſolche wieder mit der Grundlinie, und alſo unter einander parallel ſeyn ſollen und müſſen, oder ob eine kleine Abweichung von der parallelen Lage erlaubt werden könne. Im erſten Falle, ſuche man ein Dreyeck über der Grundlinie der Figur nach §. 177. und verwandele ſolches, wie eben daſelbſt gelehrt worden iſt, in ein Paralleltrapez. Die obere Linie deſſelben wird wieder als Grundlinie des 2ten abzuſchneidenden Stücks angeſehn, und auf dieſelbe Art wieder ein Dreyeck, und daraus ein Paralleltrapez gefunden ꝛc.

Da dieſes häufig vorkömmt, ſo ſoll Fig. 68, in 3 verſchiedene, mit der Grundlinie parallel laufende Theile, getheilt werden. a b c d halte 462 □ Ruthen; A ſoll über a b zunächſt 180 □ R.; dann B 160 □ R. und C 122 □ erhalten. Alſo mit ab=48° in 180° dividirt und den Quotient mit 2 multiplicirt, giebt 7 R. 5 F. Höhe eines 180 □ R. haltenden Dreyecks.

Dieſe auf einer ſenkrechten, ef, aufgetragen, und durch den erhaltenen Punct eine Parallele mit ab (aber nur punctirt) gezogen, nemlich gf; dieſe mißt 36°1'6'', und giebt mit ab = 48°, multiplicirt und die Quadratwurzel aus dem Producte extrahirt, 41°6'6'', als obere Parallele zu ab.

Nun nehme man dieſer und der Grundlinie halbe Summe, $\frac{41^\circ 6' 6'' + 48^\circ}{2} = 44^\circ 8' 3''$, und dividire damit in den Antheil A = 180; ſo ergiebt ſich 4°0'1''5''' zur Höhe des Paralleltrapezes, welches auf die ſenkrechte ef getragen, und durch eine durch den daher erhaltenen Punct mit ab gezogene Parallele ik, für A 180 Ruthen, abſchneidet; ik wird dann richtig 41°6'6'' wie vorhin gefunden, halten; ſonſt iſt gefehlt. Berechnet man das Trapez abik zur Probe, durch $\frac{4166 + 48}{2} . 4015$; ſo ergeben ſich 179 R. 99 F. 24 Z. ꝛc. folglich hat A, um keinen vollen Quadratſchuh zu wenig, womit man ſehr wohl zufrieden ſeyn kann. Um B ſeinen Antheil zu finden, ſollte nun ik als Grundlinie angeſehn, und das Paralleltrapez dann eben wie vorhin geſucht werden; allein richtiger wird auch hier die Theilung, wenn man A und B Antheil zuſammenſchlägt, und ſolches als ein ganzes Stück zur Grundlinie ab, abſchneidet. Folglich A + B = 180 + 160 = 340 □ R.; dieſes dividirt durch ab = 58 und der Quotient duplirt, giebt 14°1'6''6''' zur Dreyeckshöhe für 340 □ R.

Dieſe Höhe wird wiederholt aus dem

Puncte e, auf ef geſetzt, und lm gezogen und ge-meſſen. Aus dem Producte von lm.ab, oder 25°5′.48, die Quadratwurzel extrahirt, giebt 34°9′8″5‴, für no; Nun zuletzt

$\frac{no + ab}{2} = \frac{34985 \text{ und} + 48}{2} = 41492$ in 340 di-vidirt, giebt die Höhe 8°1 9″4‴, welche aus e wie-der ſenkrecht abgeſetzt, und no gezogen wird. Nach angeſtellter Berechnung von ikno, wird man ſol-ches um 14 Fuß, 76 Zoll ꝛc. zu groß, hingegen nocd oder des C Antheil, um 23 Fuß, 84 Zoll zu klein finden.

Es ſind ſolches aber Differenzen, welche in der Ausübung gar nicht oder nur äußerſt ſelten in Be-tracht kommen; und ſind beſonders durch das nur unvollkommen mögliche Meſſen von gh und lm, wo das beſte Auge ungewiß iſt: ob es 36°1′6′ und 25°5′, oder 36°1′5″ und 25°5′ und einige Zolle annehmen ſoll. Deshalb gewöhne man ſich bald an das möglichſte Erſparen der Meſſungen mit dem Cirkel; dieſes und das öftere Abſetzen der Maßen aus ver-ſchiedenen Puncten, verurſachen die meiſten und be-deutendſten Unrichtigkeiten. Summirt man die be-rechneten Inhalte,

A = 179°, 99′24		ſo fehlen 10 Fuß von dem ganzen Flächengehalte,
B = 160, 14 76		
C = 121, 76,15		
461, 90,15		

welche in den Theilungsmaßen ſich verloren haben, die aber füglich zu überſehen ſind.

Man kann annehmen, daß ſolche ſelbſt nach Ver-

hältniß unter den A B, C, berechneten Gehalten vertheilt ſtecken; und man könnte dieſes alſo berechnen:

462 □ R.	10	462	10	462	10
*	180	*	160	*	122
Fac. 3 Fuß	90 Z. (Fac. 3 F.		50 Z. (Fac. 2 F.		6 Z.

Dieſes kann man alſo nach jedes berechnetem Inhalte, als ſtecke ſolches mehr in ihm, als herausgefunden; zutrauen und hinzu thun. Man erhielte alſo:

A = 179° 99′24
  + 3 90
B = 160 14 76
  + 3 50
C = 121 76 15
  + 2 60

462, 00, 15

Von dem zu großen Theile nimmt man den Ueberfluß hinweg, und giebt ſolchen dem kleinern, indem man z. B. mit n o = 34°9′8″5‴, in das plus des B dividirt, nemlich in 18′20″00‴; oder man rechnet des A Ueberfluß zu dieſem des B hinzu = 21′40″, und dividirt mit n o in dieſe Fläche, ſo erhält man $\frac{214000'''}{34985'''} = 6'''...$ zur Höhe eines Parallelogramms, welches von n o herunterwärts nach a b zu, abgeſchnitten werden müßte, um C, 122 Ruthen vollkommen zu geben; und von A müßten hingegen die 3′90″ plus, welche dem B für D abgeſchnitten worden, wiederum von i k nach a b zu, dem B wieder hinzu geſchnitten werden. Für dieſes Beyſpiel iſt das Ganze der hier gelehrten Berichtigung ſo unnöthig als unmöglich, da die Maßen ſchon zu klein ſind; allein es iſt für den Fall ſo⸗

gleich mit gezeigt, wenn ſich nemlich größere Plus oder Minus ergeben.

Wir gedachten vorhin noch des 2ten Falles; wenn nemlich die Theilungslinien nicht vollkommen parallel zu ſeyn brauchen, wie man dann theilen könne. Es iſt in dieſem Falle, das §. 177. angegebene, und in Fig. 61 erläuterte Verfahren, ganz anwendbar. Sollten z. B. Fig. 69. 64 □ Ruthen abgeſchnitten werden, und a b wäre 10 Ruthen lang, ſo dividirte man mit ſolcher in dieſen abzuſchneidenden Flächengehalt, und erhielte dadurch die Höhe eines halb ſo großen Dreyecks: welches ganz wie §. 177, gelehrt iſt, gezeichnet wird. An ſolches zeichnet man nun ein gleich großes △ b d f; ſo wird a b d f 64 □ Ruthen enthalten. Sollte ein 2tes Stück abgeſchnitten werden: ſo kann ſolches ebenfalls durchs Zuſammmenſchlagen der Maßen genauer über a b, als einzeln über d f, auf ähnliche Art erhalten werden.

Es wären z. B 46 □ der 2te abzuſchneidende Theil; ſo ſchneidet man 64 + 46 = 110 □ Ruthen nun über a b ab, und hat den Vortheil, d f nicht meſſen zu dürfen. Das Trapezoid a b g h hält 110 □ Ruthen und a b d f hält 64 □ R; alſo 110 — 64 = 46, das Trapezoid d f g h.

Man kann auch, wenn nicht der äuſſerſte Grad der Schärfe in der Abtheilung erfordert wird, dieſe Theilungslinien durch Zeichnung vollkommen, und zwar ſehr leicht parallel machen; d f und g h werden in x und y, in 2 gleiche Theile getheilt; und durch

x und y Parallelen mit a b gezogen, als i k, l m; ſo ergiebt der Anblick, daß allerdings die Theilung wegen der oberhalb und unterhalb ab- und angeſchnittenen ungleichen Stücke, nicht richtig ſeyn könne; aber, ſo wie ſolches bey △ d y i und △ k y f, ganz unmerklich und wirklich unbedeutend iſt, ſo kann man dieſe Methode Parallelſtücke zu erhalten, bey gewöhnlichen nicht ſehr bedeutenden Fällen, allerdings mit vielem Nutzen gebrauchen; beſonders bey Ackerſtücken, deren Seiten ſtets wenig von der parallelen Richtung gegen einander abweichen; und empfehle ich ſolches daher beſtens.

§. 182.

Vortheilhafte Eintheilung und Berechnung krummlinichter Figuren.

Eine Figur bequem und ſo richtig als ſchnell zu theilen, muß man ſchon bey der Berechnung derſelben einige Vortheile zum Grunde legen.

Fig. 70 ſoll in 3 ungleiche Theile getheilt werden; zuvor muß daher ſein Inhalt bekannt ſeyn. Man ziehe zur Berechnung, die Linie + +, und ſetze von unten an ſo vielmal 5 oder 10, oder noch beſſer, wenn die Größe der Figur und der Stücke, der Theilung es rathſam machen, 20 zu 20 Ruthen Längen auf ſolcher ab, ſo viel es geht; und ziehe

durch

durch dieſe Puncte rechtwinkliche Linien durch ++ bis an den Umfang. Im Abſchnitte a ſchneide man die Bogenſtücke durch Sehnen ab. In b laſſe man an der linken Seite auf y eine ſenkrechte Linie fallen, um die Krümmung abzuſchneiden, desgleichen von y auf x, und wieder rechts von x herunterwärts, um die dortige Krümme abzuſchneiden. Von π wiederum 2 ſenkrechte herabwärts, um die Hauptkrümmen abzuſchneiden, und in jeder derſelben wieder Sehnen, um die Bogenſtücke gehörig genau zu erhalten. Nun iſt die Berechnung nach den ſehr leicht und ſicher abzunehmenden Maßen bald geſchehen; welche auf jede Linie, wie Fig 70. beſtimmt iſt, geſchrieben werden. Man hat nun 4 große Rechtecke, welche gut zu berechnen ſind; und zu jedes Gehalt, werden die einzeln über der Abſchnittslinie der 5, 10 oder 20 Ruthen liegenden kleinen Stücke hinzugeſetzt. Um die durch Sehnen abgeſchnittenen Bögen practiſch möglich und nützlich genau zu berechnen, ſo wird, wie beym Abſchnitt a Segment φφ aus der Mitte der Sehne die ſenkrechte, bis zum Bogen gemeſſen, dieſe Höhe mit der Sehne multiplicirt, und NB. vom Producte, $\frac{2}{3}$ zu dem Inhalte (nicht die Hälfte, wie bey der Dreyeckberechnung, denn der Bogen iſt **größer**, als ein Dreyeck von dieſer Grundlinie und Höhe) genommen. Oder, welches die Rechnung abkürzt, das Product mit 2 multiplicirt, und durch 3 dividirt In b, c, d werden die Dreyecke, wie ſchon bekannt, leicht berechnet, beſonders da nur die Grundlinie gemeſſen

zu werden braucht, denn die Höhen ſind ja alle 5 Ruthen, und ſo werden dann zuletzt wieder die Bogenſtücke und Dreyecke des letzten Abſchnitts e, zu dem letzten Rechteck hinzu gerechnet; ſo weiß man genau, wie viel a, b, c, d, e, einzeln enthalte. Es ſoll die ganze Berechnung hergeſetzt werden.

△ a, enthält für ſich allein, 20 R.		30° 40′ zuſam.
2 Segmente, jedes à 5° 20′	10 — 40 F	
Pargr. b, für ſich — —,	50 — 40 —	52 15.
Ein Dreyeck neben ſolchem	1 — 75 —	
Pargr. c, für ſich — —,	55 — 40 —	58 40.
Ein Dreyeck neben ſolchem	3 — — —	
Pargr. d, für ſich — —,	60 — —	60 50.
Ein Dreyeck — — — —,	— — 50 —	
Pargr. e, für ſich — —,	40, — — —	61 69.
2 △ und 2 Segmente —,	21, — — 69	
		Summa 263 R. 14 F.

Die 3 Stücke der Theilung ſollen, A = 110°, B = 90°, C = 63° 14′, enthalten. Da der Gehalt jedes Abſchnittes a, b, c, d, e, einzeln bekannt iſt, ſo kann man ſogleich ſehn, wie viel zu dieſem oder jenem Theile, um A, B oder C zu bekommen, noch hinzugeſchnitten werden müſſe. Wir wollen Fig. 11 (welche dieſelbe Fig., als Fig. 71 iſt) unten mit A anfangen. Der Abſchnitt e und d, enthalte zuſammen 122° 19′; alſo 12 Ruthen, 19 Fuß mehr, als A haben ſoll; dieſe ſchneidet man von x (welches d begränzt) herunterwärts ab, und zwar, indem man mit x = 13 Ruthen, als Grundlinie, in

obige 12°19' dividirt, und dadurch die Höhe eines ſo großen Parallelogramms enthält. Dieſe Höhe, welche $= \frac{12^\circ 19' 00'' 00'''}{13^\circ 0' 0'' 0'''} = 9' 3'' 7''' ..$, wird recht-winklicht von x herunterwärts geſetzt, und durch ſolche eine Parallele gezogen, welches die Theilungslinie für A wird. Streng genommen, iſt das abgeſchnittene Stück, weil die 2 kurzen Seiten desſelben nicht parallel laufen, nur ein Paralleltrapez, und der Inhalt von 12°19' nicht vollkommen genau abgeſchnitten; allein bey ſolchen geringen Höhen, und einer ſo kleinen Abweichung vom Parallelſeyn der Seitenlinien, iſt ſolches ganz aus der Acht zu laſſen, und kann man ſolches Verfahren beynahe durchgehends beybehalten, bey großen Höhen von 3 — 4 Ruthen, und großer Abweichung der Seitenlinien, muß man aber, wie in dem vorhergehenden §. §. gelehrt worden iſt, abſchneiden. Um B zu beſtimmen, ſo rechnet man zuerſt die von d abgeſchnittenen 12°19' zu c hinzu und bekömmt 70°59'; dieſe von B Antheil = 90° abgezogen, bleiben 19°41, welche von b noch hinzugeſchnitten werden müſſen. Dieſes geſchieht wie vorhin. Mit y = 11°5', wird in 19°41 dividirt, und die erhaltene Höhe auf y ſenkrecht abgeſetzt: ſo wird eine durch ſolche gezogene Parallele, auch B Antheil abſchneiden, und C Antheil bleibt von ſelbſt übrig. Dieſe Art der Berechnung und Eintheilung, hat einen außerordentlichen Nutzen, beſonders auch bey großen Ackerlagen, wo man auf ++, die Berechnungslinien π, x, y,

20 zu 20 Ruthen ꝛc. von einander ziehen kann; denn hierdurch kann man in der größeſten Schnelligkeit, Figuren, faſt ohne Beſorgniß in Zahlen zu fehlen, berechnen, und die Berechnung eben ſo leicht wieder überſehn und prüfen; indem man bloß zu addiren braucht.

Um z. B. bey 20 Ruthen Höhe, das Parallel-trapez fghi zu berechnen, addirt man bloß fh und gi = 13° 8′ + 13°, und hängt 2 Nullen an die Summe, ſo hat man ſogleich den Flächengehalt in Fußen. Alſo 26800 Fuß = 268 Ruthen. Anfänger können ſich dafür folgende Regel entwerfen: „Bringe der beyden Parallelen etwa verſchie„denes Maß auf einerley Benennung, und ſum„mire ſolche dann; an die Summe hänge eine Null „mehr, als die letzte Zahl des aufſummirten „Maßes von der Decimalſtelle der Ruthen, an „Anzahl der Decimalſtellen abſteht; bezeich„net jene letzte Zahl z. B. Linien, ſo „ſchneide von der mit Nullen verſehenen Summe, „von der Rechten zur linken 2 Zahlſtellen für die „Linien, und wieder 2 Zahlſtellen für die Zolle, „dann 2 Zahlſtellen für die Fuße ab, ſo bleiben vorn „die Ruthen ſtehn.“ Um z B. das Paralleltrapez b Fig. 70, zu berechnen, addirt man bloß x = 13° und y = 11° 5′; an die Summe werden 2 Nullen gehängt, und da die letzte Zahl Fuße ſind, ſo werden 2 Zahlen für die Fuße abgeſchnitten, dann bleiben 245 Ruthen übrig. Hätte man 2 Parallelen, eine von 26 R. 3 F. 5 Z. 6 L., und die andere

von 129 R. 0 F. 3 Z.; $26° 3' 5'' 6'''$ }
ſo addirt man $129\ 0\ 3\ 0$ }

$155\ 3°|8\ 6|00''|00'''$

alſo 1553 Ruth. 86 Fuß iſt der Flächengehalt; ſogleich durchs bloße Addiren und Nullenanhängen gefunden; da man ſonſt hätte 155386 durch 2 dividiren, und nachher mit 20 Ruthen multipliciren müſſen. Als $\frac{155° 3' 8'' 6'''}{2} = 77° 6\ 9'' 3'''$ und

$$\begin{array}{l} 77° 6\ 9' 3'' \\ \quad 2\ 0° 0'\ 0'' 0'' \\ \hline 1553°|8\ 6|0\ 0''|0\ 0 \end{array}$$

wie vorhin. Bey großen Berechnungen und Eintheilungen, iſt dieſe Methode außerordentlich zu empfehlen, und für jeden Aufmerkſamen, allgemein die Vorzüglichſte. Die nützlichſte Berechnung, Verwandlung und Theilung der Figuren, bleibt für den practiſchen Geometer eines der wichtigſten Objecte ſeiner Bemühungen.

Einige Begriffe und Lehren aus der Stereometrie.

§. 183.

Nach §. 97. 98. 99, iſt der Begriff von einem **Körper** ſchon klar, und gegeben; und die **Mannichfaltigkeit** derſelben, wäre alſo der nächſte

Gegenſtand der Mittheilung. Allein unzählich iſt dieſe Verſchiedenheit, und ſo unnöthig als unmöglich die Kenntniß derſelben, in ſtereometriſcher Rückſicht.

Nur die im gemeinen Leben am häufigſten vorkommenden, für die cubiſche Berechnung unentbehrlichſten Körper, können und wollen wir hier aufzählen.

Zum Meſſen der Körper, muß auch ein Körper genommen werden — Vergl. mit §. 99. — Dieſes Maß heißt das Cubik-Maß; auch dieſes zerfällt in Ruthen, Fuße, Zolle ꝛc. Eine Cubik-Ruthe, iſt 1 Ruthe lang, breit und hoch oder dick; der Cubik-Fuß iſt ein Fuß lang, breit und hoch oder dick ꝛc. Es müſſen alſo 1000 Cub. F. Dec = 1728 Cub. f. Duodecimal-Maß; wenn neimlich 10 F. = 12 f. Fig. 72 und 73, geben ein deutliches Bild von einer Cub. Duodec. Ruthe, und Cub. Duodec. Fuße ꝛc. ab Fig. 73. iſt die Länge der Ruthe, bc die Breite, bd oder ce die Höhe, und jedes dieſer 3 Stücke iſt wieder in 12 Theile getheilt, welche in einander multiplicirt, 1728 ergeben. So iſt b Fig. 72, nur erſt eine von den 12 Schichten der Ruthe, und enthält 144 ſolcher Würfel als a, deren jeder, 1 Fuß lang, breit und hoch, alſo ein Cubikfuß iſt. Dieſelbe Bewandniß hat es auch mit den Cubik-Zollen, Linien ꝛc. Das unmittelbare Meſſen durch Körper zu erleichtern, hat man auch hier die Berechnung des Gehalts auszumitteln geſucht, bey welcher bloße Längenmeſſung, zureicht. Auch hat man

es für manche Geſchäfte des Lebens, bequem gefunden, aus der Cubikruthe, noch kleinere Ruthenmaßen zu bilden; nemlich die ſo genannte Schacht- und die Balkenruthe. Fig. 72 b und x; und nach ſolchen iſt b der 12te Theil der Cub. Ruthe, hält 144 Cub. Fuß, hat 1□° zur Grundfläche und 1 Fuß Höhe; x aber iſt erſichtlich, der 12te Theil der Schachtruthe, hält 12 Cub. Fuß, iſt 1 Ruthe lang 1 Fuß breit und hoch. So hat man den Cubikfuß wieder in 12 Schachtfuße, deren jeder 1□′ Grundfläche und 1□″ Höhe hat; den Schachtfuß wieder in 12 Balkenfuße, welche jeder 1□″ Grundfläche und Höhe haben, eingetheilt; folglich wird die Reduction oder vielmehr Angabe des Cubikmaßes in Schacht- oder Balkenruthen, Fuße ꝛc. keine Schwierigkeiten haben.

§. 184.

Eckichte Körper können wir, beſonders folgende hier aufzählen:

1. Das Prisma, denkt man ſich über irgend einer ebenen gradlinichten Fläche, z. B. der eines Dreyecks, von 3 Seiten deſſelben aufſteigende parallele Flächen; ſo müſſen ſolche einen Raum einſchließen, und alſo einen ſogenannten prismatiſchen Körper bilden. Die Seitenflächen ſind ſtets Parallelogramme, die Flächen, worauf

ſolche theils ruhen, theils darinne enden, heiſſen Grundflächen, und können 3, 4, 5 .. ſeitig ſeyn, wornach das Prisma 3, 4, 5 ... ſeitig genannt wird; ſtehen die Seitenflächen deſſelben auf der Grundlinie ſenkrecht, ſo heißt es ein gerades, ſonſt im Gegentheile ein ſchiefes; eine Seite jener ſenkrechten Flächen, wie z. B. Fig. 74, ab giebt die ſo genannte Höhe des Prisma; die Höhe iſt alſo der ſenkrechte Abſtand der Grundflächen von einander.

Sind die Grundflächen Parallelogramme: ſo heißt das Prisma ein Parallelepipedum; und zwar bey Rechtecken von Parallelogrammen rechtwinklicht.

Alle Arten der Prismata, werden auf folgende Art berechnet:

„Man mißt und berechnet ihre Grundfläche, „und multiplicirt ſolche mit der Höhe des Prisma "

Fig. 74, iſt ein 3ſeitiges; die Grundfläche abc, alſo ein Dreyeck; dieſe Fläche mißt nach Duodecimalmaß 780□ Zoll; ſolche mit 14 Fuß, als der Höhe ab multiplicirt, giebt 131040 Cubik-Zoll, und ſolche durch 1728 dividirt, = 75 Cubik-Fuß und 1440 Cubik Zoll. Nimmt man an, daß 1 Dec. Fuß = 1 Duodec. Fuß, das iſt, 10″ = 12′, ſo ſind auch 1000′ Cub. Dec. = 1728″ Cub. Duodec. Maß; und kann man durch ſolche Beſtimmungen leicht jenen Cubikgehalt in Decimalmaß

verwandeln; wenn geſetzt wird: 1728 | 1000
* | 131040.

Facit = 75 C. F. 833 C. Z. Dec.

Wäre Fig. 74 ein vierſeitiges Prisma, und zugleich ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, z. B. ein Stück Bauholz; ſo würde die Grundfläche adce, = 2.780 □ Zoll Duodec. = 1560 □ Zoll betragen; und dieſe mit der Höhe, 14 . 12 = 168 Zoll multiplicirt, oder auch 131040 (weil ſolches einmal berechnet und unverkennbar die Hälfte iſt) 2 mal genommen = 262080″ = 151′1152″ Cub. Duodec. Maß.

Der cubiſche Gehalt des Holzes.

Der Gehalt einer Holzklafter, welche 6 Fuß lang und 3 Fuß breit, aber 6 Fuß hoch iſt; beträgt alſo 6 3 . 6 = 108 Cub. Fuß. Weil ſich aber viele Zwiſchenräume zwiſchen den Scheiten befinden, ſo hat man durch Verſuche ausgemittelt, daß die Klafter nur 80 Cub. Fuß Holz und 28 Cub. Fuß Zwiſchenräume enthalte. Daß man die Höhe der Körper ſtets ſenkrecht oder rechtwinklicht von einer Grundfläche zur andern abnehmen müſſe, möge ſolche wagrecht oder ſchief liegen, ſoll hier noch folgendes Beyſpiel lehren. Es ſoll an einem Berge eine Klafter Holz geſetzt werden; man giebt derſelben, wie z. B. Fig. 75, eine ſenkrechte Höhe von 6 Fuß gegen den Fuß des Berges ++, nemlich ac und bd, ſo wird der Empfänger derſelben beträchtlich betrogen werden, wenn der Berg ſteil iſt. Man errichte auf ab, als die Grund-

fläche der Klafter, ax, die Klafterhöhe als recht-winklicht (indem man nur 1 Klaftermaß in rechten Winkel auf a b ſetzt) ſo wird man ſehen, daß noch die ganze Lage c d e f, aufgeſetzt werden muß, um der Klafter ihren cubiſchen Gehalt zu geben.

Fände man x y nur 1 Fuß hoch, ſo würde der Empfänger um 18 Cub. Fuß verkürzt werden, denn cd = 6 f und die Breite 3 f. alſo 6.3 = mit 1 f. Höhe x y, alſo 18 Cub. Fuß Verluſt; und auf 100 Klafter, 16 Klafter Einbuße. Ein Köhler verlor durch dergleichen falſches Aufklaftern einſt ſein ganzes Vermögen, weil er das, aus einer gewiſſen großen Holzklafter-Zahl zu liefern verpflichtete Kohlenquantum nicht ablieferte, und den Defect erſetzen mußte. Ein Geometer, welchem derſelbe ſolches nachher klagte, und ſeine Unſchuld, ſowohl in Rückſicht der Vernachläſſigung der Kohlenmeiler, als des kleinſten Betrugs verſicherte, und dennoch den richtigen Empfang derjenigen Klafter-Summe, nach welcher man ihn des Defects mit Recht beſchuldigen konnte, behauptete, ſagte ſogleich: daß die Klafter-Zahl zwar richtig geweſen ſeyn könnte, aber hingegen der Klafter-Gehalt zu klein geweſen ſeyn müſſe; er unterſuchte die daſelbſt übliche Art des Klafterns, und entdeckte bald, daß der Köhler gerade ſo viel Holzmaſſe weniger bekommen haben müſſe, als der Kohlendefect ergab; wodurch jener wieder zu dem Seinigen kam.

2. Der Cylinder oder die Walze, ein bekannter, durchaus gleich runder ſtarker Körper, wird

auf dieſelbe Art als das Prisma berechnet; das heißt, man ſucht die Grundfläche, welches bey ſolchem eine Kreisfläche iſt, und multiplicirt ſolche in die Höhe deſſelben. Fig. 76. meſſe der Durchmeſſer der Grundfläche des Cylinders 7 Fuß; ſo iſt die Peripherie 22, und die Quadratfläche $= \frac{7 \cdot 22}{4} = 38\frac{1}{2}$ □ Fuß; die Höhe des Cylinders betrage 10 Fuß, alſo iſt $38'\frac{1}{2} \cdot 10' = 38'50'' \cdot 100'' = 385000''$ Cub. Dec. Maß, oder in Duodec. Maß, $38'\frac{1}{2} = 5544$ Duod. □″; dieſe mit 12.10 multiplicirt, giebt 665280″ Cub. Maß = 385 Cub. Fuß.

3. Die Pyramide iſt ein Körper, von deſſen Grundfläche die Seitenflächen oberhalb in einem Puncte zuſammenlaufen; wie Figur 74. B iſt. Es giebt nach der Zahl der Seitenflächen 3, 4, 5... eckichte Pyramiden. Man berechnet ſolche, indem man die Grundfläche berechnet, und mit dem 3ten Theil der Höhe, (weil jedes 3eckichte Prisma ſich in 3 gleich groſze Pyramiden zerlegen läßt) multiplicirt.

Man nehme an, Fig. 74. B ſey eine 3eckichte Pyramide, deren Grundfläche ein Dreyeck welches 780 □ Zoll Duodecimalmaß, mißt. Die Höhe ſey 14 Fuß; alſo $\frac{14}{3}$ F. = 56 Zoll; folglich $780 \cdot 56 = 43680 = 25$ Cub. Fuß und 480 Cub. Zoll. Im Forſt- und Bauweſen kommen häufig Stücke Holz vor, welche abgeſchnittene Pyramiden vorſtellen;

nemlich Stücke, welche oben und unten mit ihrer Länge im rechten Winkel abgeſchnitten ſind, und oben eine kleinere Grundfläche als unten haben; dieſe können wir uns unter Fig. 74 B, a b x y, vorſtellen. Vollkommen richtig werden ſolche berechnet, wenn man a x, b y verlängert, bis ſich ſolche ſchneiden; dann die Pyramide a b c wie bekannt berechnen und ebenfalls das Stück c x y als eine kleine Pyramide, welche an a b x y, durch die Verlängerung der Schenkel angeſchnitten worden iſt; und ziehe deren Gehalt von der größern a b c ab, ſo bleibt das Stück a b x y übrig. — Wir wollen ſolches berechnen. Iſt a c b c gezogen, ſo muß man c d meſſen, als die Höhe; allein der Punct c ſchneidet ſich oft ſehr unbeſtimmt ab, und man ſucht deshalb die Höhe durch Hülfe einer Proportion des 2ten Lehrſatzes der Aehnlichkeit der Figuren, pag. 256, AB : AJ = BC : Jm. Es ergiebt ſich nemlich nach ſolcher $ab : de = xy : ec$; alſo $\frac{de.xy}{ab} = ec =$ des fehlenden Stücks der geſuchten Höhe; denn d e iſt genau bekannt, oder kann doch genau gefunden werden. Alſo a b ſey = 5, d e = 10, x y = 2; folglich $\frac{10.2}{5} = 4$, $ec = 4$, und $10 + 4 = 14$, daher $cd = 14$ vollkommen genau gefunden, ohne Meſſung. Die Grundfläche ſey 780 □ Zoll ꝛc.; es iſt wie man ſieht, dieſelbe ſchon berechnete Pyramide, welche 25′ 480 Cub. Zoll enthält. Wir berechnen nun die Pyramide c x y. Die Grundfläche derſel-

ben ſoll 312 □″ ſeyn, ec iſt = 4 gefunden; alſo $\frac{4}{3}$.312, oder $\frac{312.4}{3}$=416 Cub. Zoll. Dieſe müſſen von abc abgezogen werden, ſo bleibt axyb übrig, daher 25′480″ — 416 = 25,064″ Cub. Maß des Stücks axyb. In den gewöhnlichſten Fällen iſt folgendes kürzere Verfahren zureichend. — Man addire die beyden Grundflächen, halbire ſolche, und multiplicire die erhaltene Zahl mit der Höhe des Stücks. Alſo die Grundflächen von B, 780 und 312 addirt, geben 780 + 312 = 1092 und halbirt, = 546 Zoll, dieſe mit 10 Fuß als der Höhe de multiplicirt, = 120 Zoll, giebt 546.120 = 65520″, oder 37 Fuß 1584 Zoll Cubikgehalt.

Anmerkung. Daß dieſes Reſultat ſo ungeheuer von dem, der vorher angeſtellten Berechnung abweicht, iſt bloß darinn zu ſuchen, daß die 2te Grundfläche 312 □″, willkürlich, und zwar zu groß angenommen, aber nicht nach dem Maße alſo gefunden iſt, wäre ſolche durch das Maß gefunden; ſo müßte und würde die Abweichung unbedeutend ſeyn.

4. Sowohl der ganze Kegel, als der abgeſtumpfte Kegel, Fig 77, werden ganz als die Pyramide berechnet.

5. Der Inhalt einer Kugel wird gefunden, wenn man den Durchmeſſer derſelben, cubirt und nach der Regel de Tri dann ſchließt: „wie

15 : 8 = der gefundene Cubus : zum Inhalte der Kugel z. B. Fig. 78, meſſe a, 4′; ſo iſt der Cubus = 4 . 4 . 4 = 64; und man ſetzt, 15 : 8 = 64 : x.

$$\begin{array}{l} 8 \\ \hline 512 | 34' \tfrac{2}{15} \text{ iſt alſo der Cubik. Gehalt.} \\ 15 \\ \hline 62 \\ 15 \\ 60 \\ \hline 2 \end{array}$$

Und die Oberfläche einer Kugel wird gefunden, wenn man den Inhalt der Kugel mit ½ des halben Durchmeſſers, multiplicirt.

Denn eine Kugel iſt einer Pyramide gleich, deren Grundfläche ſo groß, als der Umfang der Kugel, und deren Höhe dem halben Diameter der Kugel gleich iſt.

Die Kugel iſt ⅔ eines Cylinders, deſſen Durchmeſſer und Höhe, dem Durchmeſſer der Kugel gleich ſind.

Einige Begriffe, Lehrſätze und deren Anwendung, aus der Trigonometrie.

§. 185.

Um dem wißbegierigen Anfänger nur eine Idee von den ungemeinen Vortheilen dieſer, für die gan-

ze Mathematik ſo wichtigen, und ſelbſt jedem Feldmeſſer faſt unentbehrlichen Wiſſenſchaft, mitzutheilen, ihn durch einige practiſche Fingerzeige zum ordentlichen Studium derſelben aufzumuntern; glaube ich Nachſtehendes zum Beſchluſſe des theoretiſchen Theils, noch hinzufügen zu dürfen:

Der Begriff von Dreyeckmeſſung, welchen Trigonometrie bezeichnet, iſt ſchon aus der Einleitung bekannt; eben ſo, daß ſolche in die ebene und ſphäriſche zerfalle, und daß bloß die erſtere für den Feldmeſſer als Gegenſtand ſeiner ſich unumgänglich nothwendig zu erwerbenden Kenntniſſe, angeſehn werden könne. Daher kann und wird nur einiges von dieſer, hier mitgetheilt werden.

Denſelben, ja noch einen bey weitem größern Nutzen, als welchen die pag. 336 und 337, gelehrte Berechnung des Flächengehalts der Dreyecke ohne Höhenmeſſung (bloß aus den Umfangslinien) ergab; gewährt uns die Trigonometrie, in Rückſicht der zur Beſtimmung eines Dreyecks nach erforderlichen unbekannten Seiten und Winkel; da ſolche nach derſelben ebenfalls durch bloße Berechnung, gefunden werden. Unter den zur Beſtimmung des Dreyecks gegebenen Stücken, muß wenigſtens eine Seite mit befindlich ſeyn; denn 3 gegebene Winkel, ohne eine Seite bey ſich zu haben, laſſen (wie aus dem Vorhergehenden bekannt iſt,) bloß die Zeichnung eines ähnlichen Dreyecks zu. Die 3 Stücke, welche man zur Beſtim-

mung der übrigen fehlenden eines Dreyecks, haben oder kennen muß, ſind alſo entweder;

1. eine Seite und zwey Winkel, oder
2. zwey Seiten und ein Winkel, oder
3. Alle drey Seiten.

§. 186.

Wenn die Seiten eines Dreyecks, verhältnißmäßig mit den Winkeln wüchſen, ſo könnte man die fehlenden Stücke durch Proportionsrechnung ergänzen; allein, da dieſes nicht der Fall iſt, ſo hat man gewiſſe Linien erfunden, welche als Mittel zu jenem Ziele führen; ſie heißen zuſammen genommen trigonometriſche Functionen; und einzeln, ſo, wie ſolche in der 79ſten Figur benannt ſind. Jeder Winkel (wie alſo auch ∟ acb) läßt aus ſeinem Scheitelpuncte durch ſeine Schenkel einen Kreis ziehen, wodurch dieſe Schenkel Radien werden. Ein aus dem Endpuncte des einen Schenkels am Kreiſe, wie hier bey b auf den andern Schenkel ac (welcher Radius, auch Sinus totus genannt wird,) gefällter Perpendikel wie bd, heißt nun der Sinus des Winkels acb, und die durchſchneidende Linie cbh, und die berührende Linie ah, nennt man nun Secante und Tangente des ∟ acb, und das Stück ad, Sinus verſus, Queerſinus. Da der ∟ bcf doch unverkennbar das Complement, i. e. nach pag. 212. der Ergänzungswinkel zu 90

Grad vom ∟ a c b iſt, und zu ſolchem doch ebenfalls aus b eine ſenkrechte auf c f, nemlich b e, welche ſein Sinus wird, und ſo ferner alle übrigen Linien, wie für den ∟ a c b, gezogen werden können; ſo hat man ſolche zur unterſcheidenden Bezeichnung, *Co* ſinus, *Co* ſinus verſus, *Co* tangente, *Co* ſecante, genannt; co eigentlich ſo viel als Sinus Complementi, Tangens Complementi ꝛc.

Man kann bemerken, daß ſo wie der Sinus eines Winkels wächſt, auch alle übrigen Linien deſſelben als Sinus, verſ. Secante und Tangente wachſen, hingegen der Coſinus, Coſ. verſus, Coſecante und Cotangente abnehmen; und umgekehrt, wenn diese wachſen, jene abnehmen. Denn je größer der ∟ a c b wird, deſto größer wird b d, deſto kleiner aber b e, und ſo weiter. Jeder ſtumpfe Winkel hat denſelben Sinus, als ſein Suplementswinkel, welcher ihn zu 180 Graden ergänzt. Denn ∟ b c i hat den ∟ b c a zum Supplement, und des ∟ b c a, Sinus b d, iſt die einzige ſenkrechte Linie, welche aus b auf a c möglich iſt.

Daher iſt denn der Sinus, Sin. verſus, Tangente und Secante; der Coſinus, Coſ. verſus, Cotangente, und Coſecante des ∟ b c a, auch Sinus, Coſinus etc. für den ∟ b c i. Es ſey ferner x y Sinus vom ∟ a c x; und ∟ a c x = ∟ a c z; folglich müſſen ſolche auch gleiche Sinus haben, und y z = y x ſeyn; da nun x z die Sehne des ∟ x c z, welcher aus den beyden gleichen Winkeln a c x und a c z beſteht, iſt; ſo folgt:

„daß jeder Sinus des einfachen Winkels, die „Hälfte ſey von der Sehne des doppel„ten Winkels.

Dieſes iſt wohl zu merken, denn hierauf ſtützt ſich die Berechnung der hier angeſchloſſenen Sehnentafeln, durch welche man bey Kenntniß der Größe der Sehne, die Größe des Winkels ohne Winkelmeßinſtrument findet.

Wie die Berechnung der trigonometriſchen Functionen möglich geweſen ſey, das heißt, daß man durch die, für ſolche berechnete Zahlen, auch wirklich den von ihnen in den Functionentafeln angegebenen Winkel, habe ausmitteln können, gehört nicht hierher, es würde uns zu weit führen; man findet ſolche in dem ſchon empfohlenen Vegaiſchen Handbuche mit ihren Logarithmen berechnet, verzeichnet, und in der Einleitung deſſelben zugleich einen Gebrauchs-Unterricht, welchen man ſtudieren muß.

Bloß einige trigonometriſche Lehrſätze und darauf gegründete practiſche Berechnungen, der dem Feldmeſſer nützlichſten Fälle ꝛc können hier folgen; wobey ich den Anfänger bitte, jeden Logarithmus ſelbſt in den Tafeln nachzuſchlagen, und durch Uebung ſich die nöthige Gewandtheit in dieſen nichts weniger als ſchweren Berechnungen zu verſchaffen.

Schon das Wenige hier mitgetheilte, wird ihn faſt in jedem Falle zureichend unterſtützen, und ein erweitertes Studium dieſer großen Wiſſenſchaft, ſeinen Fleiß bey jedem Schritte belohnen.

Es liegen bey nachfolgenden Berechnungen obige Vegaiſche Tafeln zum Grunde. —

§. 187.

1ſter Lehrſatz.

In jedem Dreyecke verhalten ſich die Seiten gegen einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel, und umgekehrt die Sinus der Winkel, wie die ihnen gegen überliegenden Seiten. Alſo Fig. 81.:

$$\left.\begin{array}{l} C : A = \text{Sin. } c : \text{Sin. } a \\ C : B = \text{Sin. } c : \text{Sin. } b \\ B : A = \text{Sin. } b : \text{Sin. } a \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} \text{Sin. } a : \text{Sin. } b = A : B \\ \text{Sin. } a : \text{Sin. } c = A : C \\ \text{Sin. } b : \text{Sin. } c = B : C \end{array}\right\}$$

2ter Lehrſatz.

In jedem Dreyecke verhält ſich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente von der halben Summe der dieſen Seiten gegenüber liegenden Winkel, zur Tangente der halben Differenz, von eben denſelben Winkeln. Alſo Fig. 81.

$$A + C : A - C = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\angle a + \angle c) : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\angle a - \angle c)$$

$$B + C : B - C = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\angle b + \angle c) : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\angle b - \angle c) \;*$$

$$A + B : A - B = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\angle a + \angle b) : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(\angle a - \angle b)$$

3ter Lehrſatz.

In jedem Dreyecke verhält ſich die größeſte Seite, zur Summe der beyden übrigen Seiten,

wie die Differenz dieſer 2 Seiten zum Unterſchiede der beyden Theile, in welche die größeſte Seite getheilt wird, wenn man von der ihr gegenüberliegenden Winkelſpitze, einen Perpendikel auf ſie fällt.

Alſo Fig. 82.:

$$ab : ac + bc = ac - bc : bd - ad.$$

§. 188.

Anwendung obiger Lehrſätze auf vorkommende Fälle.

I. Bey rechtwinklichten Dreyecken.

Für die Auflöſung der Aufgaben dieſer und aller andern Dreyecke, merke man ſich folgende Regel:

1. Sollen Seiten gefunden werden, ſo müſſen die beyden erſten Glieder der nach den Lehrſätzen anzuſtellenden Proportion, Sinuſſe der Winkel ſeyn.
2. Sollen aber Winkel gefunden werden, ſo müſſen daſelbſt Seiten ſtehn.

Im erſten Falle ſetzt man ſtets des Winkels Sinus, welcher der gegebenen Seite gegenüber liegt, zuerſt; im letzten Falle aber umgekehrt die Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenüber liegt,

zuerſt; dann kann der Anſatz nicht mehr falſch werden.

Aufgaben.

a. Iſt die Hypothenuſe und ein Cathetus gegeben, oder bloß die beyden Catheti; ſo kann man den fehlenden Cathetus, oder die Hypothenuſe, durch Anwendung des Pythagoräiſchen Lehrſatzes ausmitteln.

b. Es ſey Fig. 80. die Seite A = 15°3′1″, B = 40°0′0″0‴, (der R ∟ als das 3te Stück, iſt in jedem dieſer Dreyecke, ſtets als mitgegeben, anzuſehen) es ſolle daraus der ∟ a gefunden werden?

Alſo nach Nr. 2. dieſes §. und dem 1ſten Lehrſatze deſſelben, C : A = R (oder Sin. tot.) ; Sin a. Die beyden mittlern Glieder alſo multiplicirt, und durch das erſte dividirt, giebt die Formel um Sin. a. zu finden. Als, $\frac{A.R}{C}$ = Sin. a; welches dieſelbe Formel iſt, die Vega pag. 292 in der 5ten horizontalen Queerreihe von oben, angegeben hat, nemlich Sin. a = $\frac{R.A}{H}$, denn H iſt hier C. Man ſucht alſo die Logararithmen von A, R, und C auf, und verfährt ganz nach der Formel.

Logar. A = 4.1849752
Logar. R = 10.0000000

(vide pag. 189. bey Vega) 14.1849752
Logar. C = 4.6020600

Logar. Sin. a = 9.5829152.

Dieſer Logarithmus des Sinus a, wird pag. 261 (bey Vega unter 22° 30′ nicht ganz genau aufgefunden;) der daſelbſt befindliche iſt der nächſt kleinere, (welchen man nach der Einleitung jenes Buchs, pag. LXI. Zeile 15 von unten, in ſolchem Falle ſuchen muß) als 9.5828397, dieſen von Logar. Sin. a, abgezogen,

9.5829152
9.5828397

bleibt Reſt = 755.

und dieſen Reſt durch die Differenz 50.81 dividirt, giebt 15, welches Secunden ſind; der Winkel a hält alſo 22° 30′ 15″. Duplirt man die Seite A, welche jetzt Sin. dieſes Winkels war, und duplirt ihren Winkel a, ebenfalls; ſo ergiebt ſich die Sehne für den doppelten Winkel a; das iſt, der Sehne = 2. A = 2. 15° 3′ 1″ = 30° 6′ 2″, ſteht ein Winkel = 2. ∟ a = 2. 22° 30′ 15″ = 45 Grad — Min., 30 Secunden, gegenüber. — Auf dieſe Art ſind die angefügten Sehnen-Tafeln berechnet. —

Um einen Winkel von 45 Grad abzutragen, ſo ſetzt man auf einer gezogenen Linie, dieſe Linie ſey Fig. 80, ab. nach einem verjüngten Maßſtabe 40

Ruthen ab, (weil ſolches Maß bey allen Winkeln der Tafel, als Radius und Schenkel der Winkel, zum Grunde liegen) und reißt aus dem feſtgeſetzten Winkelpuncte hier a, ebenfalls mit 40 Ruthen einen Bogen p, und aus dem andern Endpuncte des Schenkels b, mit dem in den Tafeln neben 45 Grad aufzuſuchenden Sehnenmaße, einen 2ten, obigen p durchſchneidenden Bogen q, ſo giebt der Durchſchnittspunct die Richtung des, einen Winkel von 45 Grad bildenden Schenkels, an; d. i. man ziehe a o, ſo hält ∟ b a o, 45 Grad. Pag. XLI. der Sehnen-Tafeln, findet man bloß 45 Grad — Minuten, 30 Secunden, die darneben ſtehende Sehne von 30° 6′ 2″, gehört alſo nur dieſem Winkel zu; allein, da der Winkel von 45 Grad und ∟ 45 Grad — Minuten, 30 Secunden, bloß um 30 Secunden verſchieden ſind, ſo kann man das letztere, (die obige) Sehne, füglich als die Sehne des erſtern, annehmen.

Um einen Winkel der Sehnentafel zu prüfen, ob ſolcher nicht Druck- oder Rechnungsfehler enthalte: ſo halbire man ſeine Sehne und nehme ſolche als A, hingegen 40 Ruthen als C, Fig. 80, an, und ſuche den Winkel a; den gefundenen ∟ a dupliere man, dieſer muß dann dem, in der Sehnentafel ſtehenden und zu prüfenden, gleich ſeyn. 2 — 5 Secunden dürfen hier noch differiren.

Man wollte z. B. den Winkel 75 Grad prüfen; ſo findet man, daß 74° 59′ 54″ nach pag. LXVI.

der Sehnentafeln, demſelben näher komme, als 75°—58′; denn dort fehlen nur 6 Sec., und hier hat man 58 Secunden zu viel; alſo nimmt man die Sehne von dem erſtern, und halbirt ſolche ꝛc.

$$\frac{48°7'0''0'''}{2} = 24°3'5''0'''$$

deren Logarithmus = 4.386 49 90=A
10.00 . . . . . =R

14.386 49 90
4.602 06 00=C

9.784,43 90=Sin.a
9.784,28 24

Reſt — 15.66 |00| 57″.
Diff. = 274′5
1372 5

1 93 50
Wäre alſo 27 45.

der ∟a = 37°29′57″, und giebt ſein Doppeltes 74°59′54″, wie neben der Sehne von 48 R. 7 F. ſteht; folglich iſt dieſer Winkel richtig beſtimmt.

c. Es ſey Fig. 80. C die ſchiefe Seite eines Berges, welche gemeſſen worden iſt, ſo wie der ∟a, welchen ſolche mit dem Fuße B des Berges macht, gegeben; man ſoll daraus dieſe Horizontallinie, welche ſich ſenkrecht unter b, dem Endpuncte von C endigt, und ferner die Höhe, den Perpendikel A, welcher das Gefälle des Berges angiebt, finden. Auch hier gilt der 1ſte Lehrſatz; allein da

Seiten geſucht werden, ſo ſetzen wir nach Nr. 1. dieſes §. an;

Sin. tot. : Sin. a = C : A giebt $\frac{\text{Sin. a . C}}{\text{Sin. tot.}} = A$

und Sin. tot. : Sin. b = C : B giebt $\frac{\text{Sin. b . C}}{\text{Sin. tot.}} = B$

Da aus Fig. 79. ſchon einleuchtet, daß ein Sinus des einen ſpitzen Winkels eines R△, der Coſinus ſeines Complements ſey; — denn in Fig. 80, iſt ja wegen der Parallelen ∟ α = ∟ β, und ∟ γ = ∟ δ und Coſin. be = dc, als dem 2ten Cathetus im R△ bdc; — ſo braucht man nur die erſte Formel, und ſchreibt bloß den Coſin. des ∟ a in dem Augenblicke, daß man den Sin. a. herausſetzt, ebenfalls unter den Logar C, und dividirt auch dann, wie dort durch den Sin. tot. oder Radius. Dieſes drückt die Vegaiſche Formel pag. 292. aus, nemlich $A = \frac{\text{H . ſin. a}}{R}$ und $B = \frac{\text{H . cſ}}{R}$ (H iſt die Hypothenuſe, alſo hier C.)

Wir wollen nach dieſen Formeln daher auflöſen. Der ∟ a ſey = 22 Grad, 30 Minuten, und

C ſey = 17°6' = Log. 3.2455127	C = 3.245 5127
Log. Sin. a = 9.5828397	Log. Coſ. a = 9.965 6153
12.8283524	13.211 1280
R. = 10.	R = 10.
A = 2.8283524	B = 3.211,1280

Dieſe Logarithmen aufgeſucht, geben für B, 16 Ruthen, 2 F. 6 Z. und für A, 6° Ruth. 7 F. 3' Z. 5 Lin.

Der Coſin. a mußte als Complement zu 90 Grad, (da $\angle a$ und $\angle b$ ja den 2ten R $\angle$, im Dreyecke bilden, und $\angle b$, welches Fig. 79. der $\angle \alpha = \angle \beta$, alſo = dem Coſin. a iſt) im Vega pag. 260, unten neben ſeinem Sinus ſtehn. Dieſe Einrichtung, den Sinus und Coſinus neben einander ſtehen zu haben, iſt ſehr bequeme; ich wiederhole überhaupt aber, daß ſich der Anfänger mit der Gebrauchs-Anleitung obiger Tafeln vollkommen bekannt zu machen ſuchen müſſe.

Noch muß ich bemerken, „daß man ſich auf dieſe letztere Art, ſehr bequeme und nützliche Tafeln für die practiſche Geometrie, entwerfen könne, um das Reduciren der ſchrägen längern Linie auf bergichten, unebenen Boden, (wie die der Hypothenuſe) auf die Horizontallinie (wie die dazu gehörige Baſis) welche letztere, in geometriſchen Zeichnungen allein aufgetragen werden kann, bey vorkommenden Fällen für immer zu erſparen." — Doch darüber im practiſchen Theile ein Mehreres. —

2. Bey ſpitzwinklichten Dreyecken.

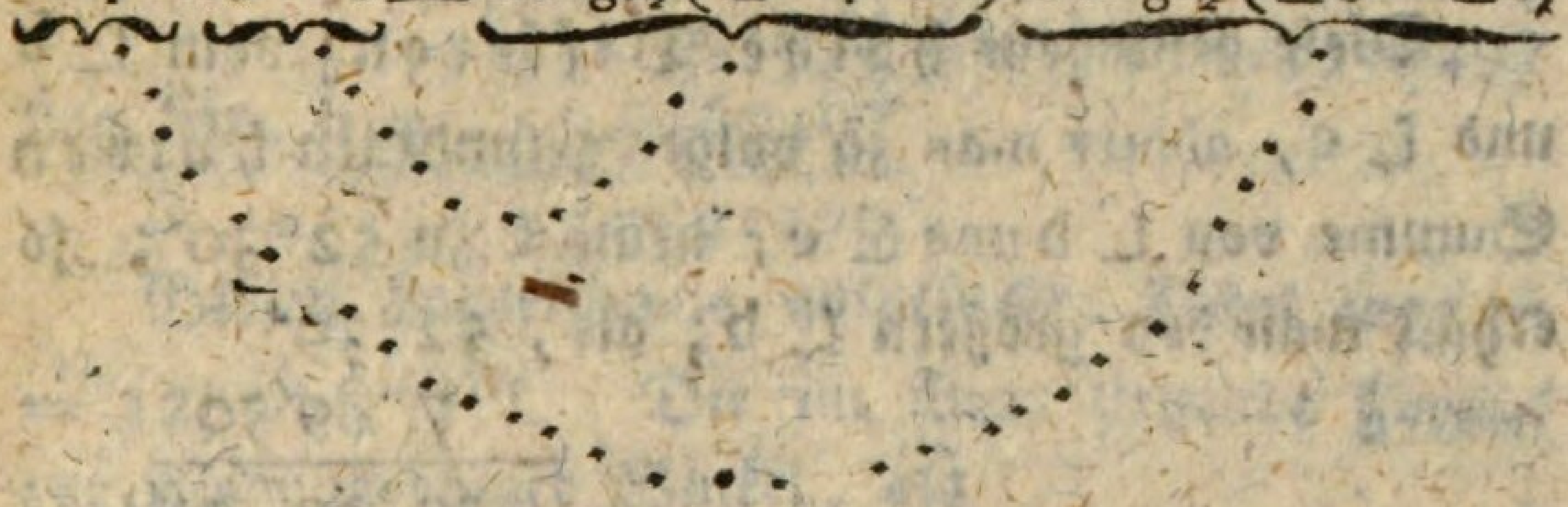
Bloß für den Fall, wenn ein gegebener Winkel von 2 gegebenen Seiten eingeſchloſſen iſt, kann man den 1ſten Lehrſatz nicht anwenden; dann muß man nach dem 2ten Lehrſatze auflöſen. Dieſer Fall iſt aber ſehr wichtig, er kömmt in der practiſchen Geometrie häufig vor.

Es mögen die fehlenden Winkel allein, oder

bloß die 3te Seite geſucht werden, ſo beſtimmt man ſtets zuerſt die Winkel.

Es ſollen die $\angle$ b und c, ſo wie die Seite A, Fig. 81. gefunden werden; darzu iſt $\angle$ a $=75°$, $B=10°\,8'$, $C=8°9'$. Aus dem Anſatze nach dem 2ten Lehrſatze, zieht man aus

$$^{*}B+C : B-C = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\angle b+\angle c) : \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\angle b-\angle c)$$



die Formel $$\frac{B-C.\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\angle b+\angle c)}{B+C} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}.\,(\angle b-\angle c)$$

und löſt nach ſolcher auf. Als
$B-C=10°8'-8°9'=1°9'$; ferner
$\angle b+\angle = \angle a+\angle b+\angle c-\angle a = 180°--75° = 105°$;
denn alle 3 Winkel bliden zuſammengenommen, 2 R.; alſo 180° — $\angle$ a, welcher 75° hat, ergiebt für $\angle b+\angle c$, 105°. Dieſes nach der Formel ½ mal genommen, giebt: $\frac{105}{2} = 52°\,30'$. Dazu den Logarithmus der Tang. aufgeſucht, und den Logarithmus von $B-C = 1°9'$ dazu addirt, giebt

Log. B — C = 3.2787536	9.0993.06 9
Log. Tang.	9.0984 46 0
½ (∟b+c) = 10.1150195	8 60 9 | 00 50″
13 3937731	1 70.3 3
dividirt durch	8 5 1 6 5
B+C = 19°7′	
= 4.2944662	9 2 50
Log. Tang. ½	Log. Tang. ½ (∟b—∟c)
(∟ b — ∟c) = 9.0993069	= 7°9′50″.

Dieſe gefundene halbe Differenz vom ∟ b und ∟ c, addirt man zu obiger gefundenen halben Summe von ∟ b und ∟ c, nemlich zu 52° 30′; ſo erhält man den größern ∟ b; als, 52°39′

52°39′
7 9′50
59°39′50″

und wenn die halbe Differenz abgezogen wird

52 29 60
7 9 50
45 20 10

ergiebt ſich durch den Reſt der kleinern Winkel.

Denn man überlege, $\frac{6+4}{2}=5$ und $\frac{6-4}{2}=1$; addirt man die halbe Diff. = 1, zur halben Summe = 5, alſo 5 + 1, ſo entſteht die größere Zahl der Summe, 6; und ſubtrahirt man 5 — 1, ſo zeigt der Reſt die kleinere Zahl 4. Alſo iſt auch ∟ b, als der größere Winkel, (welches man daran erkennt, daß demſelben die größere Seite, B, gegenüberſteht, (vide §. 123) = 59° 39′50″; und ∟ c = 45° 20′ 10″, und

$\angle a = 75°$ }
$\angle b = 593950$ } Nun iſt die Seite A, durch
$\angle c = 452010$ } Anwendung des 1ſten Lehrſa-
tzes leicht gefunden; man ſagt nach Nr. 1.

Sin b . Sin. a = B : A; giebt die Formel

$$\frac{\text{Sin a . B}}{\text{Sin b}} = A.$$

Nun findet man Logarithmen

Sin. a = 75°.	= 9.9849438,	12.32	9.9359881
Logar. B,	= 3.0334238	50	616
	13.0183676	61 6|00	9.9360497
Log. Sin. b =	9.9360497		
	3.0823179		

Dieſen Logarithmus aufgeſucht, findet man A = 12° 0′ 8″ 7‴. Die im Vega ſtehende Formel zur Findung obiger Winkel, als

Vorbereitung.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(180 - c) = m \\ \text{Tang. n} = \dfrac{(A - B)\,\text{Tang m}}{A + B} \\ a = m + n,\ b = m - n. \end{array}\right\}$$

drückt ganz daſſelbe aus, was wir nach der unſrigen gethan haben; ſie ſagt nemlich: ziehe den eingeſchloſſenen Winkel von 180 Grad ab, und dividire den Reſt durch 2, ſo ergiebt ſich eine gewiſſe Winkelgröße m; nach deren Graden, Minuten ꝛc., ſuche man den Logar. einer Tangente auf, multiplicire ſolche mit dem Logarithmus der Differenz von den beyden gegebenen Seiten, und dividire durch den Logar. ihrer Summe. Den dadurch erhaltenen Logar. einer Tangente genant n, in den Tafeln auf-

geſucht, giebt einen Winkel, welcher zu dem erſt gefundenen m addirt, den größern der geſuchten beyden Winkel, und von m ſubtrahirt, den kleinern Winkel giebt.

3. Bey ſtumpfwinklichten Dreyecken,

verfährt man ganz wie bey den ſpitzwinklichten; nur muß der Sinus des Complements von dem ſtumpfen Winkel, z. B. von ∟ 160 Grad, der Sinus des Complements von 20 Grad, welcher ∟ 160 Grad zu 2 R ergänzt, genommen werden. Dabey iſt ferner die Vorſicht zu beobachten, daß wenn bey 2 gegebenen Seiten und einem Winkel, der gegebene Winkel der kleinern der gegebenen Seiten gegenüber ſteht, man durchaus vor Anſtellung der Berechnung ausmittele, ob der zu ſuchende Winkel ein ſpitzer oder ſtumpfer Winkel ſey. Denn wäre z. B. Fig. 82. ac, bc und ∟ b gegeben, und der ∟ a und die 3te Seite zu finden, und dabey nicht beſtimmt, ob ∟ a ſpitz oder ſtumpf ſey, ſo würde man ſchwanken, ob man die, bey der Berechnung des ∟ a erhaltenen Grade, Minuten ꝛc. ſolle als das Maß des Winkels a, oder bloß als das Maß des Supplements ſolches Winkels, anſehen; dieſes wird Folgendes erläutern. Trüge man ca nach ce, ſo hätte man ein gleichſchenklichtes △ ace, in welchem ∟ a = ∟ x; der Winkel x iſt aber auch das Suplement vom ſtumpfen Winkel ceb; ergäbe ſich nun in der Berechnung,

für den ∟ a, 47°, ſo könnte man ∟ a = 47°, und ſolchen dann als ſpitzen Winkel, aber eben ſo leicht auch Statt deſſen den ſtumpfen Winkel ceb, welcher das Supplement von x = a zu 2 R iſt, nemlich 133 Grad, annehmen; und dann erhielte man Statt △ abc, das ungleich kleinere bce, welches offenbar äußerſt unrichtig wäre. Wenn aber der zu ſuchende Winkel entweder als ſtumpfer oder als ſpitzer beſtimmt iſt, (welches ſelbſt durch ungefähre Meſſung möglich wird, ſo zieht man im erſten Falle die in der Berechnung erhaltenen Grade ꝛc. für a, von 180° ab, und erhält im Reſte ſein eigentliches Maß; im letzten Falle hat man natürlich ſogleich ſein Maß. Die 3te Seite findet man dann leicht, nach Lehrſatz 1. Die Anwendung des 3ten Lehrſatzes:

„aus drey gegebenen Seiten eines Dreyecks, die 3 Winkel deſſelben zu finden,“

kömmt in der Praxis nur bey Prüfungen vor; und ſoll ein Beyſpiel die darüber nöthige Erläuterung ganz in der Kürze angeben. Fig. 82. ſey ab = 18°, bc = 12° ac = 9°, gegeben; man fälle aus c den Perpendikel cd, und bilde ſich aus der Proportion des 3ten Lehrſatzes die Formel,

$$\frac{(bc + ac).(bc - ac)}{ab} = bd - ad.$$ Dann folgt die Berechnung. — Es iſt bc + ac = 21; bc − ac = 6,

alſo Log. b c + a c = 3.3222 193
Log. b c — a c = 2.4771 213
5.7993.406
Log. a b = 3.2552 725
2.5440 681

Alſo b d — a d = 3°5′0″. Die Hälfte dieſer gefundenen Differenz = 1°7′5″ addire man zu der halben Summe von b d + a d = $\frac{ab = 18}{2} = 9$, alſo $9° + \frac{3°5'}{2} = 9° + 1\ 7'5'' = 10°7'5''$; ſo ergiebt ſich das größere Stück, nemlich b d; zieht man hingegen 1°7′5″ von 9° ab, ſo bleibt der kleinere Theil a d übrig, welcher 7°2′5″ mißt. Nun hat man zwey rechtwinklichte Dreyecke, in welchen die Winkel a und b, und dadurch, wenn man ∟ a c d und ∟ b c d addirt, auch ∟ c leicht gefunden werden können.

Practiſcher Theil.

I. Abſchnitt.

Practiſche Vorbereitungskenntniſſe, zu geometriſchen Aufnahmen.

1. Einiges über das Studium dieſes Theils, und die darüber vorhandenen vorzüglichen Quellen.

§. 189.

Die Vorkenntniſſe, welche aus der theoretiſchen Geometrie genommen, im erſten Theile vorgetragen wurden, ſind gleichſam der Grund, auf welchem das Gebäude der practiſchen Geometrie aufgeführt wird, und ſich ſtützt. Da in dieſem Werke — wie ich ſchon mehreremale geäußert habe — bloß die

unentbehrlichſten theoretiſchen Lehren mitgetheilt werden konnten, ſo will ich einige Bücher empfehlen, in welchen der Wißbegierige, mit den aus dieſen Blättern geſchöpften Vorkenntniſſen, noch mehr Befriedigung finden kann; ſie ſind:

1. Georg Simon Klügels, Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie. 3te Auflage.

2. B. F. Mönnich, Lehrbuch der Mathematik; 1ſter Theil; oder

3. F. Meinerts, Lehrbuch der Mathematik, I. und II. Theil.

Für das Studium der practiſchen Geometrie, ſind folgende Bücher ſehr zu empfehlen:

1. Franz Rauſch, practiſche Mathematik; 1ſter Band die Feldmeßkunſt;

2. F. Meinert, Anfangsgründe der Feldmeßkunſt; (ſehr gut).

3. Johann Tobias Meyer, gründlicher und ausführlicher Unterricht zur practiſchen Geometrie. I. II. III. Theil, 3. Auflage — gegenwärtig das vorzüglichſte in Rückſicht der Gründlichkeit und Vollſtändigkeit; es erfordert aber ſchon einen denkenden Kopf, und wenigſtens vollkommen die Vorkenntniſſe, welche dieſes Buch zum Selbſtunterricht, enthält.

4. G. A. Däzel, über die zweckmäßigſte und

zuverläſſigſte Methode, große Waldungen zu meſſen ꝛc.; — lehrt die vortrefflichſte und bisher einzig ſichere Art ſolcher Aufnahmen, Zeichnungen und Berechnungen: doch erfordert ſolches wegen ſeiner Kürze, und ſelbſt ſchon bey einigen Vorkenntniſſen der Buchſtabenrechenkunſt, viel Nachdenken.

Derjenige, welcher Schritt vor Schritt die von mir hier vorgetragenen theoretiſchen und practiſchen Lehren ſtudiert, und ſich gründlich zu eigen gemacht hat, kann nun zu dem angezeigten, weiter führenden theoretiſchen und practiſchen Werken mit Muth übergehen, er wird ſolche gewiß verſtehn, und ſtudieren können. Vorzüglich empfehle ich aber das Studium der Buchſtabenrechenkunſt, Algebra, (ſo weit jene Bücher führen), und der Trigonometrie; jeder vordringende Schritt in ſolchen, ſchiebt einen wichtigen Stein des Anſtoßes in der practiſchen Geometrie zurück.

Die wenigen hier mitgetheilten Lehren, werden dem Anfänger, von ihm vollkommen einſtudiert, und aufmerkſam angewandt, ſchon in den gewöhnlichen Fällen vollkommen ſicher und raſch arbeiten laſſen. Er muß ſolche ebenfalls, Paragraph auf Paragraph folgend, ſtudieren, und nie eher weiter gehen, bis er alles Vorgetragene ſich gänzlich ſo zu eigen gemacht hat, daß er fühlt, ſolches auch einem Andern wieder deutlich machen zu können.

Eine Lücke hat hier dieſelben Nachtheile, als wie in der theoretiſchen Geometrie.

2. Beſchreibung der unentbehrlichſten Inſtrumente und Hülfsmittel.

§. 190.

A. Zu Linienmeſſungen im Felde und auf dem Papiere.

Ob man gleich die Linien zuvor im Felde meſſen muß, ehe man ſolche aufs Papier auftragen und meſſen kann, und alſo eigentlich auch in dieſer Ordnung die Inſtrumente aufgeſtellt werden ſollten; ſo habe ich dem ohngeachtet Gründe, mit der Beſchreibung eines brauchbaren Reißzeuges den Anfang zu machen. Die Reißzeuge, welche die Mechanici Hetzel, zu Halle an der Saale, verfertigen, bleiben ſich unter allen mir bekannten, an Güte vorzüglich gleich; man kann ſolche für 2½, 3, 4, 5, 6 bis zu 12 Thaler an Preiſe erhalten, ſchon die für 4 Rthlr. ſind recht brauchbar, und ſo ſteigt die Güte und Vollſtändigkeit mit den höhern Preiſen fort.

Die Zirkel müſſen aber in jedem Reißzeuge gute Gewinde haben, welche leiſe und ſtärker geſtellt werden können, und in den Spitzen von gutem reinen Stahl gearbeitet ſeyn; der Zirkel muß ſich gleichförmig, ohne beym ſanften Zuſammendrücken Ruckweiſe fortzugehn, auf und zumachen laſſen. Stangenzirkel heißt der, mit einer eingeſetzten Spitze, verſehene Zirkel; das klei-

ne einzuſetzende Bleyrohr oder die Reißfeder, heißt ein Einſetzſtück, und der zweyte Zirkel, ein Handzirkel. Die Reißfedern müſſen ebenfalls gutes Stahl zu ihren Blättern haben, und möglichſt zarte Linie ziehen. Der Transporteur, Dreyeck, Linial und verjüngte Maaßſtab, ſind bekannte Stücke.

Die Güte des erſtern, iſt Genauigkeit der Gradeintheilung, und die haarſcharfe ſenkrechte Stellung des 90ſten Grades über dem Centro der Spitze, welche von der Linie des 180ſten Grades, durchſchnitten wird. Die Güte des Linials und Dreyecks iſt ſehr wichtig, und man muß ſolche prüfen und berichtigen können.

Man ziehe zur Prüfung des erſtern, an deſſen einer Seite eine gerade Linie, wie Tab II. Fig. 25. x y, und wende dann das Linial um, ſo, daß die untere Fläche, obenhin zu liegen kömmt. Mit derſelben Seite ſchiebe man es nun an die gezogene Linie x y, und ſehe, ob ſolche aller Orten von der Kante des Linials (auch Façe genannt) ſcharf und gleich, getroffen wird; findet man Abweichungen, ſo muß daß Linial ſo lange geändert werden, bis es eine vollkommene Linie darſtellt.

Das Dreyeck iſt noch leichter zu prüfen; man errichtet ſich nach §. 126. über einer Horizontal-Linie, einen Perpendikel, und legt das Dreyeck, wie Figur 26 zeigt; ſo lange Baſis und Perpendikelſeite noch nicht vollkommen den rechten

Winkel bilden, muß geändert werden. Von Birnbaum- oder Ebenholz, erhält man die beſten Liniale und Dreyecke. Fig. 6. ſieht man einen ſogenannten Verjüngungszirkel; er beſteht aus 2 gleichen Schenkeln, welche genau gleich weit von einander abſtehende Löcher haben, um durch ſolche einen Schraubenſtift ſtecken, und durch eine Schraubenmutter leiſe und hart gehend, beweglich machen zu können. Der Stift wird ſtets, durch gleiche Schenkel bildende Löcher, wie die Figur zeigt, geſteckt; ſo wie ae : ab = ac : db. Da alſo hier, wie die Schenkel jetzt geſtellt ſind, ae = 4, und ab = 8, ſo wird die Oeffnung ac eine Linie faſſen, welche ſich zu bd, wie 4:8, das iſt 1 : 2 verhält; folglich bd um die Hälfte verjüngt. Würden die Schenkel mit ff übereinander gelegt, ſo würde fb = 9 und af = 3. Die von db gefaßte Linie, alſo wie 9 : 3, d. i. wie 3 : 1, zu ac, ſich verhalten; daher ac die Linie ⅓ kleiner darſtellen. Dieſer Zirkel iſt wirklich ſehr nützlich, aber nicht unentbehrlich; allein folgender Zirkel, Fig. 11., welcher ein Stangenzirkel mit einem Zirkelgewinde heißt, iſt gar nicht zu entbehren, wenigſtens für den hier empfohlenen nützlichen Gebrauch, zur Erſparung des Ablothens der Puncte des Meßtiſches, durchaus nicht.

Es ſind a und b, 2 Schenkel von ſehr gutem Holze; oder noch beſſer von Stahl oder Meſſing, welche in f, in einem guten, durch eine Lappen-

mutter feſtzuſtellenden Gewinde, wie die Zeichnung ergiebt, ſich endigen. d und g ſind bewegliche aber gut durch Federn anſchließende Hülſen, welche eine mit der Kante der Stangenſchenkel in einer ſenkrechten Linie zart auslaufende Spitze von hartem Stahle, haben müſſen; dabey können die Hülſen durch eine kleine Stellſchraube, auf dem Schenkel feſtgeſtellt werden. Die 3te Zirkelſpitze, iſt der durch das Zirkelgewinde gehende ſich fein ſpitzende ſtählerne Stift. Dieſen Zirkel kann man auch zum copiren der geometriſchen Zeichnungen ſehr gut gebrauchen.

§. 191.

So wie man auf dem Papiere die Linien durch Puncte beſtimmt, ſo bedient man ſich zu ihrer Beſtimmung der Stäbe im Felde. Es giebt zu dieſem Gebrauche:

1. ſogenannte Meßfahnen, wie Fig. 2 zeigt; Stäbe, $\frac{5}{4}$ Zoll dick 10 — 12 Fuß lang, von klarjährichtem aufgeſpaltenen Tannenholze verfertigt; welche oben eine Orangefarbene Flagge erhalten, um gegen Gebüſche und andere Gegenſtände, vor welchen ſie ſtehen, deſto leichter erkannt zu werden. Im Walde ſind weiße Flaggen die unterſcheidendſten. Uebrigens werden dieſe, wie alle nachfolgende Stäbe, am Fuße mit Eiſenblech, 5—6 Zoll lang beſchlagen; an die Spitze

aber ein, einen Zoll langes Stück geſchmiedetes Eiſen, angeſchweißt; und der ganze Stab mit guter weißer Oelfarbe, 3 — 4 mal dünn angeſtrichen: dadurch erzielt man mehr Dauer, und mehrere Auszeichnung fürs Auge, in der Ferne.

2. Flucht= oder Abſteckſtäbe; — Fig. 3 — welche 5 — 6 Fuß lang ſind, und nur 1 Zoll dick; von demſelben Holze, beſchlagen und angeſtrichen. Dieſe werden zum Abſtecken kurzer Linien gebraucht.

3. Zeichenſtäbchen, — Fig. 5. — welche nur ¾ Zoll dick, von jungen Eſchen-Stämmchen dieſer Stärke, 4 Zoll lang beſchlagen und auch weiß angeſtrichen, gefertigt werden müſſen — durch ſie bezeichnet man die Kettenzüge, wovon in der Folge das Nöthige geſagt werden wird; um ſolche bequem fortzubringen, ſo läßt man dazu eine leichte lederne Taſche mit einem Boden von Sohl=Leder und einem Riemengehänge zum Umſchnallen, fertigen. Zehn Stück, von dieſen Stäbchen, und 5 Stück von Nr. 2. 5 Stück von Nr. 1. reichen ſchon zu, eine nicht unbedeutende Abſteckung vorzunehmen. — Die Meßfahnen empfehle ich zu dieſem Gebrauche beſonders. —

Die Fig. 4 gezeichnete ſogenannte Abſichtstafel, hat einen doppelten Gebrauchszweck; einmal die Puncte der Linien, und zweytens, beym Abviſiren derſelben, gleiche Höhen zu bezeichnen und darzubieten. Die eiſerne Spitze erhält nach der Zeichnung, eine eiſerne kleine Scheibe, um

ſtets gleich tief in den Boden eingeſtoßen werden zu können. Das kleine gegatterte Täfelchen, iſt 1 Fuß bis 1 F., 6 Zoll □ groß, ½ Zoll dick, mit doppelt eingeſchobenen und 2 Hirnleiſten verſehen, und wie die Zeichnung ergiebt, über Ecks gegittert, weiß und ziegelroth angeſtrichen; dünnes Eiſenblech iſt zu dieſer Tafel das vorzüglichſte Material, und man muß ſolche nach der Inſtrumentshöhe, höher und tiefer ſtellen und feſtſchrauben können. Von der Scheibe bis zur Mitte der Tafel, kann dieſe Höhe für immer feſtgeſtellt werden; xy bezeichnet ſolche. Sehr nützlich iſt es, auf jeder Meßfahne und Abſteckſtabe, vom Anfange des Beſchlags an gerechnet, ebenfalls ſolche Höhe, ſey es auch nur durch einen rothen Ring zu bezeichnen, ſo wie auch Fußmaßen an ſolchen zu markiren.

Fig. 1, iſt eine Meßruthe der Landes = oder Ortsgebräuchlichen Schuhlänge von 12, 13, 14, 16 ꝛc. Schuhen, in 10 gleiche Theile als Decimalſchuh eingetheilt.

Zum Handgebrauche im Felde, iſt eine runde Stange von ¾ Zoll Stärke, die bequemſte; die einzelnen Füße werden mit gelben kleinen breitkupfichten Nägeln, und die halbe Ruthe durch rund um oder in ⁙ geſchlagene 5 Nägel, bezeichnet. Das Holz muß ebenfalls aus einem klarjahrichten aufgeſpaltenen Tannen = Stamme, gefertigt ſeyn. — Außer dieſer führt man noch eine gleich lange und ſehr genau eingetheilte Ruthe, das ſogenannte Muttermaß, welche bloß zur Berichtigung

der Meßkette gebraucht wird; ſie muß ohngefähr 2 Zoll breit 1 Zoll dick ſeyn. Dieſe und die erſtere Ruthe werden an beyden Enden gut beſchlagen, und nach dem Gebrauche an einem Bindfaden frey aufgehangen.

Fig. 8. zeigt ein Stück von einer Meßkette; man läßt ſolche in einzelnen Decimalfüßen, von einem, einen kleinen Gänſefederkiel ſtärken Eiſendrathe verfertigen. Die Ringe, in welche die Füße eingreifen, müſſen von geſchlagenem Meſſinge, und ausgedreht ſeyn, und genau von der Mitte des einen Ringes bis zur Mitte des andern 1 Decimalfuß Diſtanz meſſen; ausgenommen ſind die Fußſtangen, welche an den ſub Fig. 9 und 10 erſichtlichen ganzen und halben Ruthenzeichen, und an den Kettenſtab-Ringen, etwas kürzer werden; doch muß von der Mitte x und y, Fig. 9 und 10 bis zu der Mitte der rechts und links anliegenden Fußringe, ſo wie von dem Mittelpuncte des Kettenſtabringes +, bis zur Mitte des nächſten Fußringes, ebenfalls genau ein Decimalfuß Entfernung ſeyn. Die Enden des Fußdraths, werden vor dem Biegen in Oehre, etwas ausgeglüht. — Durch den Kettenſtabring +, geht ein verſenkter Wirbel mit einem Ohr, in welches der erſte Fußſtab eingehängt wird.

Fig. 9. iſt ein, von gegoſſenem Meſſing gefertigtes Zeichen der ganzen, ſo wie F. 10, dergleichen für die halben Ruthen.

Fig. 7. iſt der Kettenſtab, von $\frac{1}{4}$ Zoll Stärke

und 6 Fuß Höhe, tannenen Holzes, obiger Qualität. Der Fuß iſt beträchtlich ſchwerer, als der, der übrigen Stäbe, und von geſchmiedetem Eiſen, mit einem rund herum gehenden Abſatze oder Vorſprung, zur Auflage des Kettenſtabringes (wie die Zeichnung lehrt) gefertiget.

Fig. 13, eine bekannte Setzwage von Holz; nur muß der Schnurſchlag genau im rechten Winkel mit der Grundlinie zuſammentreffen.

Fig. 14. iſt eine ſogenannte Libelle, Niveau Waſſerwage, welche den wagrechten Stand eines Objects, viel zuverläſſiger und ſchärfer, als jene angiebt. Da jeder Mechanicus ſolche verfertigt ſo wäre eine detaillirte Beſchreibung überflüſſig; nur in Rückſicht des Gebrauchs merke man: daß dieſelben aus einer, mit einer flüſſigen Maſſe, bis auf einen kleinen Theil gefüllten, ausgeſchliffenen und Luftdicht verſchloſſenen Glasröhre beſteht, welche, um die ſich oben unter dem Glaſe befindliche ſehr empfindliche Bloſe genau beobachten zu können, zum Theil von einer Faſſung in Holz oder Meſſing frey iſt; zu beyden Seiten der Mitte der Röhre aber 2, 3, 4 ꝛc. Striche eingeätzt ſind, um nach ſolchen die Stellung der Blaſe + beurtheilen, und den wagrechten Stand beſtimmen zu können; ſoll dieſer da ſeyn, ſo muß die Blaſe genau zwiſchen 2 zunächſt rechts und links zuſammenliegenden Strichen ſtehn, welches man einſpielen nennt; ſonſt muß der Tiſch ꝛc. worauf die Libelle ſteht, an der einen oder andern Seite bis

zum Einſpielen der Blaſe, höher oder tiefer geſtellt werden. Für $1\frac{1}{2}$ Laubthaler, kann man dergleichen Niveau von 3 Zoll Länge $\frac{3}{4}$ Zoll Stärke, in Meſſing gefaßt, bey jedem guten Mechanicus bekommen.

§. 192.

B. Zu Winkelmeſſungen im Felde und auf dem Papiere,

glaube ich denjenigen, welche des Unterrichts dieſes Buchs bedürfen, nachſtehende wenige, einfache, wohlfeile, dauerhafte, bequeme und zureichende Genauigkeit gewährende Inſtrumente, als die zweckdienlichſten empfehlen zu können: und die Beſchreibung anderer, in den empfohlenen Büchern ausführlich beſchriebenen theuern Inſtrumente, weglaſſen zu dürfen.

Beſchreibung des Meßtiſches ꝛc. Fig 15, und der dazu gehörigen Stücke. Nr. 16 bis mit 20 *; und noch Nr. 23.

Unter dem Worte Meßtiſch, verſteht der Geometer eine gewiſſe mechaniſche Vorrichtung, welche dazu dient, durch ſolche, Linien und Winkel im Felde, wie auf einem Tiſche in der Stube,

nach geometriſchen Grundſätzen aufzunehmen ꝛc. Der hier zu beſchreibende beſteht aus folgenden Stükken.

A iſt ein meſſingener Aufſatz einer ſogenannten Kippregel, um Linien abzuviſiren, und auf die Tiſchplatte ee, auf welcher er ſteht, zeichnen zu können.

Der unterſte Theil deſſelben bb, iſt ein 18 Zoll langes ohngefähr $\frac{3}{16}$ Zoll dickes und $\frac{7}{4}$ Zoll breites meſſinges Linial, welches in der Mitte, wie Fig. 12, + zeigt, ein dergeſtalt ausgehendes Ohr hat, daß die Kante deſſelben $\alpha\beta$, genau durch das Centrum des Ohrlochs trifft. Auf dieſer Regel iſt ein Gabel-Fuß aa befeſtigt, welcher ein ſogenanntes Diopterlinial cc, mit einem Gradbogen verbunden, trägt; dieſes Linial ſteht hochkanticht, und hat nach der Zeichnung in der Mitte einen coniſchen Zapfen, welcher bey h ſich in einer Gabel des Fußes aa, dergeſtalt gut eingeſchliffen, ſenkrecht ſanft bewegt, daß die Mitte der Dioptern Durchſichten, welche man, wie die Dioptern ſelbſt, in Fig. 24 und 25. in der Linie, xy ſieht dabey genau in einer ſenkrechten Richtung über der Kante oder Schärfe des Linials $\alpha\beta$ Fig. 12, bleiben. Fig. 25. ſieht man, wie die Richtung genau durch die kleine Oeffnung y, das Haarkreutz, und die Schärfe des Linials bey x, herunter geht: dieſe Linie heißt die Viſir-Linie. Der Gradbogen hat 3 Zoll Radius, und auf dem Säulen Fuße aa, wie Fig. 28 zeigt, und bey deſſen Erläuterung noch weitläuftiger aus einander ge-

ſetzt werden wird, ein aufgeſchrobenes und eingetheiltes Stück Meſſing, Vernier oder Nonius genannt, welches ſelbſt die Viertel=Grade genau abnehmen läßt.

Noch weit beſſer iſt es, Statt der Diopteru f und g, ein Fernrohr, ſey es auch nur 6 Zoll lang, zu gebrauchen, es wird mit c c bey h, unbeweglich feſt, durch einen halben Hülſen-Lappen und kleine Schrauben verbunden. Dieſes Rohr bekömmt außer den gewöhnlichen 2 Gläſern noch ein 3tes Glas, welches ganz platt geſchliffen iſt; durch deſſen Mitte ein rechtwinklichtes Kreutz feiner Linien, ins Glas geätzt ſind. Das nach dem Gegenſtande zugerichtete vordere Glas heißt das Objectiv=Glas, ſo wie das vor das Auge zu nehmende, hingegen das Ocular=Glas, das Fernrohr ſelbſt, ein holländiſches Rohr. Gebraucht man dieſes Statt der Diopteru, welches kaum 1 Laubthaler Koſtendifferenz macht, ſo wird c c nicht viel länger als der Gradbogen, wie die Striche andeuten.

Das Linial b b, auch Regel genannt, ſchleift ſich auf einer mit Papier überzogenen Tafel — welche das Tiſchblatt heiſt, wie Fig. 12 zeigt, mit ſeinem Ohre + um einen durch die Tafel gehenden coniſchen (d. i. Kegelartigen) Zapfen: welches bey der Beſchreibung der 17ten Fig. noch ausführlich erläutert werden wird.

Das Tiſchblatt e e, iſt ½ Zoll dick, und 2 Schuh □, von altem Lindenholze aus 8 Stücken,

mit gewechſelten Jahren gegen einander geleimt, und mit guten Hirn und 2 verſenkten Einſchiebleiſten gegen das Verziehen verwahrt, gefertigt, es wird mit Papier überzogen, oder iſt mit einer $\frac{1}{16}$ Zoll dicken engl. Zinn-Platte belegt.

Wir kommen jetzt zum zweyten Haupttheile, zu der Scheibe BB, auf welcher die Platte ee ruht, und ſich herum drehen läßt. Fig. 23 zeigt ſolche am deutlichſten. Der Durchmeſſer derſelben, beträgt hier 18 Zoll; der Kranz iſt aus 6 Stükken zuſammengeſetzt, und hat 3 Zoll Breite und 2 Zoll Höhe.

Die Oberfläche wird bis auf einen, $\frac{1}{8}$ Zoll ſtehen bleibenden Rand zur Auflage des Tiſchblattes $\frac{1}{2}$ Zoll ausgedreht, wie Fig. 23. aa ergiebt. xy iſt daſelbſt eine, außerhalb auf der Peripherie befindlichen Platte, wie xy Fig. 15, zeigt. In den Krantz ſelbſt, wird ein gut verbundenes rechtwinklichtes Kreuz von 3 Zoll breitem und 1 Zoll ſtarkem Holze mit der untern Fläche gleichlaufend, eingebunden, durch welches der obige coniſche Zapfen der Regel geht, und in ſolchem befeſtigt iſt. Unter den Kranz werden noch 3 oder 4 Klötzchen an die Stellen mit Zapfen und gutem Leim angeſetzt, wo die Füße des nun zu beſchreibenden Statıvs, eingeſchroben werden ſollen. Dieſe ganze Scheibe muß ebenfalls von ſehr gut ausgetrocknetem alten Ahorn oder Nußbaumholze, gefertigt werden.

Die Füße CCC,

worauf die Scheibe ruht, bilden ein vorzüglich gutes Stativ — wie man dergleichen Vorrichtung

nennt. — Man kann ohne den mittlern ſogenann-ten Centralfuß, 3 auch 4 Füße unter die Scheibe anbringen; ſie werden ſo ſchräg eingeſchroben, daß die verlängerte grade Linie bis zum Boden, einen 3 — 3 Fuß 6 Zoll großen Abſtand der Fußſpitzen von einander, ergiebt.

Die Länge derſelben iſt willkürlich, circa 4 Fuß. Fig. 16 iſt ein ſolcher Fuß nach einem grö-ßern Maßſtabe gezeichnet, und ſollen deſſen Theile jetzt erklärt werden.

A iſt ein von Meſſing gut gearbeitetes Schrau-benſtück, (mit welchem der Fuß in die Scheibe ein-geſchroben wird), in ein Zirkelgewinde auslaufend, welches durch eine mit Lappen oder Flügeln verſe-hene Mutter, hart und leiſe gehend, auch ganz feſt geſtellt werden kann. Dieſes Zirkelgewinde endigt ſich in den Backen a a, welche den $1\frac{1}{2}$ Zoll ſtarken hier 4kantichten Fußſtab b, feſt umſchließen. Dann iſt der Stab 10 Zoll lang, cylindriſch, um $\frac{1}{16}$ Zoll ſchwächer abgedreht, und dieſes Stück circa 6 Zoll lang durchbohrt. Der untere Theil des durch-bohrten Stücks, iſt wieder um $\frac{1}{16}$ Zoll, 4 Zoll lang abgedreht, um eine Zwinge e e, welche an ihrem obern Ende, eine Schraubenmutter f f, befe-ſtigt trägt, verſenkt aufnehmen und befeſtigen laſſen zu können, ſo, daß eine 2te, 8—10 Zoll lan-ge Zwinge d d, ſich über ſolcher und dem Hol-ze, gleichmäßig, à frottement, herumſchließen kann. Dieſe 2te Zwinge iſt an der Scheibe g, der 4 — 5 Zoll langen, $\frac{3}{4}$ Zoll ſtarken Schraube h, befeſtigt,

und muß ſich mit dieſer und der Schraube zugleich herumdrehen.

Die Scheibe g dient, um durch ſolche die Schraube aus und ein zu ſchrauben, und dadurch die Füße zu verlängern oder zu verkürzen. Unterhalb ſchleift ſich die Schraube coniſch in einer, an eine Zwingencapſel befeſtigten Hülſe; oben auf dem Rande der Capſel, und unten auf einer Platte, durch welche ein Abſatz des coniſchen Stücks mit einer Schraube durchgeht, und durch ein angeſchrobenes Plättchen oder überfaſſende Fingerſchraube gegen das Ausheben geſichert wird. Die Zwinge wird mit ſammt der Hülſe, zugleich, durch einige, durch die Zwinge und das Holz in die Hülſe gehende Schrauben befeſtigt, wie ein jeder Mechanicus ſich nun das Ganze leicht vollkommen wird erklären können.

Der Centralfuß c φ erhält unten eine Scheibe, wie die Abſichtstafel; und wird nach der Größe und dem Wunſche des Geometers, 3 F. 6 Zoll, auch 4 Fuß ꝛc. lang gemacht; nach ſeiner Länge muß die Länge der andern längern Füße beſtimmt werden; er wird an die Schraube des coniſchen, durch das Scheibenkreutz gehenden Zapſens, angeſchroben und durch eine mit einem Anſatze verſehene Hülſe i i Fig. 15, oder blos 2 tüchtige Hülſenwinkelſchenkel, unter das Scheibencreutz befeſtigt. Steht die Tafel des Meßtiſches wagrecht, und der Grad-

bogen mit ſeiner Mitte, d. i. dem durch 90 Grad gehenden Radius ſenkrecht gegen dieſelbe, oder auch das Fernrohr ꝛc. wagrecht, und der Centralfuß bis an die Scheibe in den Boden geſetzt; ſo giebt eine, durch die Mitte des Fernrohrs gezogene, alſo horizontale Linie, und die Horizontale von der Fußſcheibe, 2 Parallelen, zwiſchen welchen die ſenkrechte Höhe „die Inſtruments-Höhe“ genannt wird, und nach welcher die Abſichtstafel gerichtet werden muß. Q R Fig. 15 iſt alſo die genau zu meſſende Inſtrumentshöhe, welcher x y, Fig. 4, gleich gemacht wird.

Fig. 17. ſieht man die Conſtruction des ſchon oft erwähnten coniſchen Zapfens, um welchen ſich die Regel dreht. a a, iſt ein Stück der Regel, b b ein Stück der Tiſchplatte, c c der Scheibe; d iſt der Zapfen ſelbſt, welcher ſich in einem $\frac{5}{8}$ Zoll ſtarken, mit einem Abſatze, auf der Scheibe aufſitzenden und in ſolche 4 kanticht ſich endigenden Unterſtücke e e e e, coniſch ſchleift. Unterhalb iſt in e e bey f f, ein Abſatz, vor welchem eine an den ſich vierkanticht endigenden Zapfen d, geſteckte Platte, Raum findet, und durch die Schraube g, welche in das vierkantichte Stück des Zapfens d tritt, und auf dieſen angezogen wird. e tritt wieder mit Zapfen in das Stück h, und wird durch die verſenkten Schrauben, i i, mit ſolchem feſt verbunden. h endigt ſich in die ſtarke Schraube k, auf welcher eine Platte, l l, die vor einem, in der Scheibe heraus zuſtämmenden Abſatz, m m, vortritt,

heraufgeſchroben wird. Auf k, wird der Centralfuß aufgeſchroben. nn iſt ein durch 3—4eckichte Stifte aufzuſetzendes coniſches Stück; um die Hülſe, Fig. 18, welche ſich um den Stift ſchleift, ganz auszufüllen; die bey xx neben oo erſichtliche Vertiefung des Stiftes von ½ Linie, dient dazu, um, wie Fig. 19. und 20. zeigt, eine Schraube, zur Schließung des Schraubenlochs, zugleich ebenend mit der Fläche der Tafel, einſchrauben zu können. Die Platte dieſer Schraube, No. 20., erhält 4 Vertiefungen, um mit einem Schraubenſchlüſſel (ohngefähr wie der Zirkelſchlüſſel) ſolche aus- und einſchrauben zu können, und in der Mitte ein von dem härtſten Stahle eingeſetztes kleines Plättchen, auf welchem durch einen zarten Punkt, genau das Centrum des Zapfens beſtimmt ſeyn muß. Dieſes dient dazu, richtige concentriſche Kreislinien auf der Tafel aus ſolchen (mit dem Radius von 40 Ruthen ꝛc.) zur Meſſung der Winkel, zu ziehen. o Fig. 17., iſt eine Schraube, welche mit ihrem Abſatze pp, die Regel nach Gefallen feſt ſtellen läßt. qq ſind Schrauben, durch welche die Flügel des coniſchen Zapfens d, mit der Tiſchplatte bb, feſt verbunden wird.

Fig. 18., iſt die bekannte Hülſe, welche durch das Ohr der Regel geſteckt, und auf ſolcher feſtgeſchroben wird. Zapfen und Hülſe müſſen ſehr gut in einander eingeſchliffen werden. Fig. 20*, zeigt die Tafel mit dem Grundriſſe des Zapfens, dem Schraubenloche, und Hülſenhohlung, von oben.

Um auch ärmern, weniger vermögenden Geometern zur Anſchaffung eines wohlfeilen Meßtiſches dieſer Conſtruction, behülflich zu werden; ſo findet man Fig. 21. eine ebenfalls ſehr nützliche wohlfeile Vorrichtung, welche kaum 5 Reichsthaler koſten wird. a a iſt eine Scheibe, ganz wie die Nr. 15. beſchriebene, conſtruirt; die Tafel b aber nur 20 Zoll □ lang; übrigens eben ſo wie dort. Der Aufſatz A, iſt von gutem alten, wo möglich in Oehl ausgekochtem feſten Holze — Birnbaum und Ebenholz das beſte — und hat eine Regel c c, von 15 Zoll Länge, welche wie die Fig. 15 und 12, um einen Zapfen beweglich iſt. Auf der Regel findet man, 1 Fuß von dem einen Ende derſelben, ein Stück Gradbogen, welches mit guten kleinen, verſenkten meſſingenen Charnieren aufgeſetzt iſt, und die Theilung der ganzen und halben Grade, für den Bogen des Radius von einem Schuhe, bis zu 25 Grad, enthält. Auf der Regel c c, iſt wieder bey d, eine 2te, das ſo genannte Diopterlinial, ebenfalls mit meſſingenen, gut gearbeiteten Charnieren befeſtigt; und bey + durchſchlitzt, daß ſolches durch ſeine Bewegung den Gradbogen ſanft durch ſich auf und nieder ſteigen laſſen kann. Bey + kann eine kleine Schraube durchgehn, um die Regel, wenn man will, am Bogen feſt zu ſtellen. Die untere Schärfe g ſchneidet dann die Grade am Bogen ab. e und f ſind die Dioptern, welche Nr. 24 von beyden Seiten gezeichnet, dargeſtellt ſind. Stellt man ſich bey das Zeichen # vor das Inſtrument, ſo heißt f das

Ocular-Diopter und e das Objectiv-Diopter, welche Nr. 24. mit gleichen Buchſtaben nach der Breite zu ſehn ſind. Auf die Grundlinie der Dioptern, wird mitten durch ihre Breite die ſenkrechte Linie x y gezogen, und die Höhe x a des einen, genau auf die ſenkrechte des andern Diopters nach x b getragen; durch a ein zartes Loch geſtochen, wenn wie Fig. 20. auf der andern Seite bey +, vorher behutſam eine Hohlung ausgeſtochen worden iſt; und bey b ein genaues rechtwinklichtes Kreutz der durchſchneidenden Linie gezeichnet, und zwar dieſe Linien ganz querdurch und $\frac{1}{2}$ Zoll länger, als das gezeichnete Gatter beträgt, eingeriſſen. Dann die 4eckichte Oeffnung durchgeſchlagen, und mit feinem Silberdrath oder Menſchen-Haaren das Kreuz eingezogen, nachdem vorher genau auf den eingeriſſenen Kreuzlinien, feine Löcher durchgebohrt waren. Man ſteckt die Haare durch die Löcher, zieht ſolche ſcharf an, und ſteckt dann ein Pflöckchen neben ſie, welches ſie feſthält.

Auf dieſelbe Art verfährt man bey dem untern Loche und Kreuze; die Höhe des Kreuzpunctes und des Augenloches, müſſen ſtets völlig genau gleich hoch ſeyn, ſo wie das Längenhaar aufs genaueſte mit der ſenkrechten Linie über der Schärfe der untern Regel oder Linials, wie Fig. 25 x y zeigt, das iſt der, Viſirlinie, zutreffen; und die beyden Kreuzhaare ſo lange gerichtet werden, bis dieſes vollkommen zutrifft.

Kleine Federn zur ſtäten Anſpannung der ein-

mal eingerichteten Haare oder Faden, Statt der Pflöck-chen zu gebrauchen, iſt ſehr nützlich — jeder Mechanicus fertigt ſolche, ſo wie das ganze Diopterlinial, für ein ſehr billiges Geld.

Die Oeffnungen oder Durchſichten an den Diop-tern, heißen auch die Pinnaciden. Die hier darge-ſtellten Diopteren, ſind für No. 21 genau in der Hälfte der wahren Größe gezeichnet; und dient die untere Pinnacide p dazu, um auch von l nach k zu, viſiren zu können, hingegen viſirt man durch die erſte, die obere a, von h nach i, weshalb die Hohlungen beyder, auf entgegengeſetzte Seiten geſtochen werden müſſen; übrigens ergiebt noch die Zeichnung No. 25 durch xy, ſo wie das ſchon bereits geſagte, „daß die Diopteren mit ihren Pinnaciden genau ſenkrecht über der Schärfe der Regel ſtehn müſſen.“ Ein ge-ſchickter Schreiner, kann dieſen ganzen Meßtiſch ſehr gut unter der Aufſicht eines ſelbſt nur angehenden Geo-meters, fertigen.

Fig. 23 zeigt eine zu Nr. 21 gehörige Vorrich-tung, welche folgendes in halber natürlicher Größe darſtellt; als b die Tiſchplatte, c eine hölzerne Schraube, welche durch ein in b eingezapftes und vernageltes Stück Holz, in d eine hölzerne Feder ge-gen die Peripherie der Scheibe a feſt drückt, und dadurch die Tiſchplatte feſtſtellt, gelöſt aber eine freye Bewegung um den coniſchen, hier nur von Eiſen zu verfertigenden Zapfen derſelben, zuläßt. —

Der Meßtiſch Fig. 15, erhält eine künſt-lichere Vorrichtung von Meſſing mit einer ſogenannten

Schraube ohne Ende, oder Führſchraube; zu deren Befeſtigung, die, an die Scheibenperipherie gedrehte Platte, mit dient. Da jeder Mechanicus dergleichen Vorrichtungen zur Gnüge kennt, und kein anderer ſolche fertigen kann, ſo wäre die Zeichnung und Beſchreibung derſelben überflüſſig. —

f iſt ein, unter die Scheibe mit Zapfen einzuſetzendes und gut zu verleimendes Klötzchen, welches man auch sub. f Nr. 21, ſieht; in ſolches wird das vierkantichte Ende einer ½ Zoll ſtarken eiſernen Schraube, gut befeſtigt, und an dieſe Schraube die Füße oder Beine des Tiſches, welche Nr. 15. rund waren und eingeſchroben wurden, hier mit der Breite der Seite, 2½ Zoll oben breit und ½ Zoll dick, unten bis auf 1½ Zoll Breite verjüngt ablaufend und gehörig beſchlagen, geſteckt; durch die Lappen-Schraubenmutter h, aber nach erfolgter Stellung des Tiſches, feſtgeſchroben. Die Beine können alſo hier die Scheibe berührend (d. i. zur Seite) nicht gegen die Scheibe ſich richtend, geſtellt werden. Fig. 25 und 26 iſt ſchon erklärt.

Die bequeme und ſcharfe Eintheilung gerader und krummer Linien in ſehr kleine Theile, iſt beſonders in Rückſicht der Kreiseintheilung der Meß-Inſtrumente, ſehr wichtig.

Folgendes wird darüber hier genügend ſeyn.

Fig. 27. a b ſey eine gewiſſe Länge, und c d = a b; wird a b nun in 21 Theile getheilt, und c d in 20 Theile, ſo ſind zwar die 20 Theile der c d, zuſammengenommen, gleich den 21 Theilen der ab zuſammen-

genommen; aber jeder einzelne Theil der c d, iſt um $\frac{1}{20}$ größer als ein Theil von a b. Dieſes auf die Kreislinie angewandt, können die Grade wieder ſehr bequem in Minuten und Secunden getheilt werden.

Die Vorrichtung dieſer Eintheilung, nennt man einen Vernier oder Nonius. Wir nehmen an, Fig. 28 ſey a b ein Bogenſtück vom Gradbogen des Aufſatzes A Nr. 15; und unter ſolchem auf dem Gabelfuße a a, ein Vernier angebracht, um die Viertel-Grade noch bequemer als mit einem aus dem Centro des Bogens bey h herabhängenden kleinen Pendel von einer Pferdehaar meſſen zu können. Der die Mitte des Bogens bezeichnende Strich, welcher auf dem Transporteur ſonſt mit 90 Grad bezeichnet iſt, wird bey dieſer Vorrichtung mit Null o bezeichnet, und rechts und links die Grade nach der Folge herumgezählt, wie die Zeichnung ergiebt. Um nun den zu dieſem Bogen angebrachten Vernier kennen und gebrauchen zu lernen, ſo ſoll deſſen Conſtruction hier durch Folgendes erklärt werden. Um einen Vernier zur Meſſung der Viertel-Grade zu erhalten, ſo ziehe man zu dem Gradbogen aus deſſen Centro, ein concentriſches Kreislinienſtück — wie hier zu a b, b c; und verlängere die Theilſtriche des 5ten Grades, von beyden Seiten des o Strichs, ſo wie des o Strichs ſelbſt, bis zu jener Kreislinie; deren durch ſolche abgeſchnittene Kreisfläche, wie die, jeder Gradeintheilung, der Limbus genannt wird. Jeder der dadurch erhaltenen beyden Theile des Limbus, welcher alſo 5 Grad faßt, wird nun in 4 gleiche Theile einge-

theilt; folglich iſt jeder dieſer 4 Theile um $\frac{1}{4}$ größer als ein Grad, alſo um 15 Minuten; und daher, da die 5 Grad doch zuſammen genommen, allen 4 Theilen gleich ſind, ein Grad alſo in 15 Minuten = in $\frac{1}{4}$ Grad, eingetheilt worden. Auch der mittlere dieſer 8 Striche, welcher mit dem o Striche des Bogens eine gerade Linie macht, wird mit o bezeichnet, und zugleich Index genannt; undſo wie die Zahl der Theile, wie bey dem Bogen von o an, herumgeſchrieben.

Wird nun der Gradbogen durchs Viſiren nach gewiſſen über oder unter der wagrechten Linie befindlichen Gegenſtände, (wegen ſeiner Verbindung mit dem Viſirlinial oder Fernrohre) mit dem Nullſtriche vom Index hinweg geſchoben, ſo ſteigt der Boden, wenn das Fernrohr nach +, Nr. 28. a und b zugerichtet und der o Strich nach derſelben Seite des Index fortgerückt iſt, im Gegentheile aber fällt derſelbe, wenn nach φ viſirt wurde; dieſe Grade des Steigens und Fallens, beſtimmt der Vernier nun. Der hier angebrachte Vernier, iſt ganz wie der vorhin gezeichnete conſtruirt, mißt alſo ebenfalls die Winkel bis zu $\frac{1}{4}$ Grad; um nun die Größe des Winkels zu finden, wenn der o Strich Nr. 28. a, rechts fortgerückt iſt, ſo zähle man zuerſt die ganzen, zwiſchen dem Nullſtriche und Index befindlichen abgeſchnittenen ganzen Grade; findet man, daß der Winkel noch Theile eines Grades enthält, (welches ſtets der Fall iſt, wenn der Strich des Index nicht

genau mit einem Striche eines Grades, zuſammen-fällt) ſo ſuche man, ob nicht auf derſelben Seite des Index, nach welcher der Nullſtrich des Bogens ſteht, ein Theilſtrich des Verniers, mit einem Gradſtriche zuſammenfällt; iſt dieſes der Fall, ſo ergiebt die, neben ſolchem Theilſtriche ſtehende Zahl des Verniers, die Anzahl der Viertel-Grade, welche der Winkel noch außer den ganzen Graden mißt. Hier, und öfterer, trifft aber kein Theilſtrich; dann muß man nun ſcharf beobachten, welcher Theilſtrich einem Gradſtriche am nächſten ſtehe; dieſes Theilſtrichs, Zahl, giebt nun eben-falls die Anzahl der Viertel-Grade an. Man kann auch durchs Vergleichen des verſchiedenen Abſtandes, der, einem Gradſtriche am nächſten ſtehenden beyden Theilſtriche, gegen einander, noch ohngefähr 4—6 Minuten außer den gefundenen Viertel-Graden, ſchäz-zen; hier mäße der Winkel nemlich $6\frac{1}{2}$ Grad, und ohngefähr 4 Minuten, alſo 34 Minuten. Fällt der 0 Strich des Bogens auf die linke Seite des Verniers, wie Fig. 28. b; ſo werden die ganzen Grade zwar wieder wie vorhin, vom 0 Strich bis zum Index, allein nebſt den Viertel-Graden und zu ſchätzen-den Minuten, nun ebenfalls auf der linken Seite abgezählt. Das kann Regel ſeyn, „ſtets auf „derjenigen Seite des Index, auf welcher der „0 Strich befindlich iſt, auch die Theilſtriche „des auf dieſer Seite liegenden Vernier gebrau-„chen zu müſſen;“ denn o c iſt der Vernier für die rechter Hand vom 0 Striche des Gradbogens, und

ob der Vernier für die linke Hand dieſes Bogens befindlichen Grade.

Durch den Gebrauch der hier empfohlenen Kippregel mit einem Gradbogen, erhält man bey Höhen und Tiefenmeſſungen die Winkel in Graden und Minuten, und dadurch zu trigonometriſchen Benutzun gen fähig; allein die Horizontal-Winkel, nur bloß in ihren Schenkeln, ohne ihr Maß ſelbſt zu kennen, welches man zu den geometriſchen Prüfungen, doch gar nicht entbehren kann.

Dieſe in Linien aufgenommenen Winkel, nun auch in Graden zu beſtimmen, dazu ſind die dieſem Buche mit einem Gebrauchsunterrichte angeſchloſſenen Sehnentafeln ſehr bequem, und gewähren ſehr viele Genauigkeit; ich verweiſe deshalb darüber an jenen Ort.

3. Anleitung, Linien und Winkel ſowohl den Umſtänden entſprechend abzuſtecken, als auch zu meſſen.

§. 193.

A. Das Abſtecken und Meſſen der Linien in zugänglichen Lagen, und zwar mit Kette und Stäben.

a. Linien abzuſtecken.

Dieſes Geſchäft iſt von außerordentlicher Wichtigkeit, ſo leicht und unbedeutend von Einfluß ſol-

ches die Herren Empiriker aus Mangel an Beurtheilungsvorkenntniſſen der ſo wichtigen dadurch zu begründenden Fehler, gewöhnlich ſchätzen. Die Endpuncte der Linien werden, wie ſchon geſagt iſt, im Felde durch Stäbe, welche lothrecht oder vertical ſtehen müſſen, beſtimmt. Diejenigen Richtungen, welche der Fall jedes Körpers und die Schnüre der Schenkel bezeichnen, ſind alle unter einander parallel, und heißen Vertical Linien; werden Ebenen oder Flächen zwiſchen ſolchen aufgerichtet, ſo nennnt man ſolche Vertical-Ebenen, Vertical Flächen.

Eine Horizontalfläche wird von wagrechten oder horizontalen Linien gebildet, und muß daher jederzeit jede Vertical Linie oder Fläche, ſenkrecht treffen. Die Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers, giebt dazu das beſte Bild, und rechtfertigt auch die Wahl der Libelle zum Horizontalſtellen. Alle übrige Flächen heißen ſchiefe Flächen.

Da in den planimetriſchen Charten und Zeichnungen überhaupt, nur die Grundriſſe, der Umfang der Figuren, aber nicht ihre krummen Flächen, Höhen ꝛc. dargeſtellt werden können und werden, ſo iſt die Horizontal-Fläche durch verticale Linien beſtimmt, der „Hauptgegenſtand der Aufmerkſamkeit des Geometers.“ Denkt man ſich von erhabenen Puncten dieſes oder jenes Gegenſtandes, Berges ꝛc. Vertical-Linien auf derjenigen Horizontalfläche, welche durch ſeinen unterſten

Punct geht, gezogen, ſo erhält man eine Idee von der horizontalen Entfernung dieſer Puncte von einander; und dieſe horizontale Entfernung ſolcher Puncte beſtimmen, heißt „ſolche auf den Horizont reduciren;“ ſo muß man ſich daher die Zeichnungen jeder Charten, als aus lauter auf den Horizont reducirten Linien, zuſammengeſetzt, denken; alle Gegenſtände derſelben ſind bloß nach ihrem Umfange in der horizontalen Lage genommen, gezeichnet. Die ſogenannten Profilriſſe, Durchſchnittsriſſe (nach gewiſſen Linien) von einer Flur, ſind keine Flächenriſſe, ſie ſtellen das Steigen und Fallen desganzen Terrains gegen eine angenommene Horizontalebene dar.

Aus dieſem Aufgeſtellten werden ſich nun die Gründe, „warum alle Linien vertical und alle Flächenwinkel horizontal, abgeſteckt werden müſſen“ erklären. Nimmt man an, daß a b, Fig 29, die Axe eines Abſteckſtabes, und c d die Durchmeſſer, ſeine Dicke bezeichnen; ſo wird ein bey a gehaltenes Auge nach f und g, an der Dicke des Stabes vorbey viſiren müſſen; ſtände alſo in p ein 2ter Stab, und ſollte zwiſchen a und p ein dritter in eine gerade Linie eingerichtet werden, ſo würde ſolcher ſo gut in x y z als in der Linie a q ſtehn können, ohne daß das Auge dieſes in a bemerkte; die Dicke des Stabes a, deckt den ganzen Winkel p a g, und iſt daher die Regel der Feldmeſſer falſch, wenigſtens zu unbeſtimmt ausgedrückt, wenn ſie ſagen: „wenn ſich die Stäbe decken, ſo ſtehn ſolche in gerader Linie.“ Man muß dagegen wenigſtens 1 gu-

ten Schritt, und bey Entfernungen von 100 ꝛc. Ruthen, wohl 2 — 3 Schritt hinter den Stab treten, an den Seiten der Stäbe, zwiſchen welchen ein Stab eingeſteckt werden ſoll, vorbey viſiren, und den einzurichtenden Stab ſo einſtecken laſſen, daß auch ſeine Seiten von der an den Seiten der obigen beyden Stäbe gezogene Viſirlinie blos berührt wird, dann erſt ſtehn die Stäbe in gerader Linie, d. i. es fallen ihre Achſen als Vertical-Linien zuſammen.

Fig. 30 zeigt die nachtheiligen Folgen, wenn die Stäbe nicht ſenkrecht ſtehen. Die Linie a c ſoll verlängert werden, die Meßfahne c, ſteht aber ſchief, es wird darauf viſirt, und dadurch der dritte Stab Statt in b, falſch in d eingeſteckt. Dieſes veranlaßt die Vorſichtsregel, „ſtets ſo viel als möglich auf den Bodenpunct der Stäbe, ja nicht aber auf ihr oberes Ende zu viſiren.“ Man kann, indem von 2 zu 2 Stäben, alſo ſtets der dritte eingerichtet wird, eine Linie nach Belieben verlängern, und Zwiſchenſtäbe einſtecken.

Der Kürze wegen will ich einmal für allemal die Methoden des Einrichtens der Stäbe, wie man es nennt, an Fig. 30 erklären. a und b ſind die beyden mit Stäben bezeichneten Endpuncte der Linien.

Der Geometer ſtellt ſich ein Paar Schritte hinter a, und läßt einen Gehülfen mit einem ſenkrecht zwiſchen dem Daumen und Zeigefinger der rechten Hand, frey hängendem, haltenden Stabe, das Ge-

ſicht dem Geometer zugekehrt, ohngefähr in die Mitte und Richtung der Linie a b gehn, viſirt dann an der Seite des Stabes a vorbey, nach b, und winket mit dem Hute oder der Hand, ſo lange rechts oder links, bis der zu ſetzende Stab in der Linie ſchwebend gehalten wird, worauf derſelbe niederwärts winkt; dieſes iſt das Zeichen, daß der Gehülfe den Stab ſenkrecht fallen laſſen und einſtecken ſolle. Iſt dieſes geſchehen, ſo ſieht der Geometer nochmals nach, ob der Stab auch richtig eingeſteckt ſey, und läßt das etwa Fehlende verbeſſern. Stecken ſchon mehr als 2 Stäbe in derſelben Linie, ſo kann ſich der Gehülfe ſogleich nach den rückwärtsſtehenden Stäben mit einrichten; und iſt ſolches ein gutes Mittel, die, beym Einviſiren des einen oder des andern Stabes begangenen Fehler zu entdecken.

Am Ende einer aus 20 Stäben abgeſteckten Linie, darf man bis zum entgegen geſetzten letzten Puncte derſelben, keinen Stab ſo wenig auf der einen als der andern Seite vortreten ſehn.

Es ſollen nun, theils um mich kürzer zu faſſen, theils eine leichtere Auffindung der Auflöſungen der Fälle gründen zu können, die Belehrungen in Sätzen aufgeſtellt, folgen.

§. 194.

Fig. 31. Eine gerade Linie zwiſchen a b abzuſtecken, wenn man nicht von a nach b ſehen kann.

Man ſuche den Punct c, aus welchem a und b

geſehen werden können, und laſſe die Stäbe d und e zwiſchen ca und cb in gerader Linie einſtecken. Viſire dann von d nach e, oder umgekehrt, und laſſe c in dieſe Linie nach f ſtellen. Ferner den Stab d zwiſchen f und a, und den Stab e zwiſchen f und b; hernach wieder f nach g und ſo fort, bis die Stäbe in gerader Linie ſtehen. Dieſe Aufgabe kömmt oft vor, ſo wie auch die zunächſt folgende.

Fig. 32. Zwiſchen zwey, durch breite Anhöhen getrennte Puncte, eine gerade Linie abzuſtekken, wo man von a nicht nach b ſehen kann, wohl aber dieſe von 2 andern Puncten, nemlich von A nach a und nach b, und ſo von B nach a und b.

Der Geometer ſtelle 2 Gehülfen bey A und B und laſſe durch ſolche zwiſchen Ab und Ba, die Stäbe Nr. 3 und 4 in gerader Linie einrichten. Ferner zwiſchen Stab 3 und b, den Stab 6, welcher aus B, und zwiſchen 4 und a, den Stab 5, welcher aus A dazu genommen werden kann, und ſo fort, bis die Linie hergeſtellt iſt; welches man, (das für den vorhergehenden Fall zugleich mit geſagt iſt) daraus findet und ſehen kann, wenn nemlich ſtets die 3 nächſt auf einander folgenden Stäbe, in grader Linie ſtehen, und dieſes bey jedem Stabe der Linie mit ſeinen 2 nächſten Stäben, der Fall iſt.

Fig. 33. Ueber einen Berg, von welchem man bloß aus den 2 Puncten c und d nach a und

f ſehen kann, zwiſchen a und f eine Linie abzuſtecken.

Man ſuche zwiſchen ca und df, 2 Puncte wie b und e, von welchen man, als von b nach d und von e nach c, ſehen kann, richte die 3 Puncte abc und def in eine gerade Linie, und nun ferner ebenfalls bcd, dann cde, dann def; und ſo fange man wieder=, wenn noch immer nicht alle 3 nächſt=auf einander folgende Stäbe in gerader Linie ſtehn, wieder auf dieſelbe Art an, abc, bcd cde, def, einzurichten, bis ſolches erzielt iſt.

§. 195.

b. Horizontalwinkel abzuſtecken; und zwar: α. Mit Kette und Stäben.

Fig. 34. zeigt, wie ein ſpitzer Winkel abgeſteckt werden muß.

-- Ich verweiſe, um Worte zu erſparen, auf den Gebrauchs=Unterricht der Sehnentafeln.

Fig. 34. Einen Winkel von 68 Grad, an einem gegebenen Puncte a, abzuſtecken.

Man ſtecke eine Linie von 40 Ruthen ab, nehme aus den Sehnentafeln das neben 68 Grad ſtehende Sehnenmaß dieſes Winkels (44° 7′ 4″,) und laſſe ſolches aus dem Puncte der abgeſtochenen 40 Ruthen, nach c zu, und wieder aus a 40 Ruthen nach

c zu, ſo abſtecken, daß die Endpuncte von dieſen Maßen, ſich in einem Puncte bey c vereinigen, indem ſolche gleichſam Durchſchnittspuncte bilden; durch den Vereinigungspunct c, ziehe man ca, ſo wird ∟ bac 68 Grad enthalten. Da dieſes bey ſo großen Maßen ſchon einige Uebung erfordert, ſo kann man auch das 4tel, 3tel, 8tel ꝛc. von 40 Ruthen (als beſtändigen Radius) und von dem Sehnen-Maße nehmen; als hier, von 40 das 8tel = 5°, und von 44°7′4″, 5°5′9″, und ſolche Maßen, Statt jener, gleich mit der Kette, und ebenfalls einer ſtarken Schnur, welche zwar ſtraff angezogen, aber nicht gedehnt werden darf, das eine Ende in a und das andere in b befeſtigt, als 2 Schenkel bey ihren Endpuncten in c zuſammen ziehn; und um ſich zu überzeugen, daß der Winkel das richtige Maß halte, ſo laſſe man in der Richtung des dadurch erhaltenen Schenkels ac, eine gerade Linie von 40 Ruthen ausſtecken, dann muß der Endpunct dieſer 40 Ruthen von b, genau das ganze Sehnenmaß des Winkels, hier 44°7′4″ meſſen; ſonſt iſt gefehlt, und muß verbeſſert werden.

In Fig. 34*, iſt auf dieſelbe Art, durch die Sehne, ein rechter Winkel abgeſteckt; es bedarf ſolches keiner weitern Erläuterung.

Fig. 35. Durch Anwendung des Pythagoriſchen Lehrſatzes, einen Perpendikel auf einer Linie gk, über einem gegebenen Punct h zu errichten.

Aus h trage man 3 Ruthen nach k oder nach g,

und nehme mit der Kette 2 Schenkel, einen von 5 Ruthen für ki oder gi, und einen Schenkel von 4 Ruthen für hi, laſſe das eine Ende dieſer Maßen in k oder g und h, feſthalten, und ziehe die andern Enden in i zuſammen; dieſes i iſt dann der Punct, welcher eine ſenkrecht Linie über h geben wird, welche nach Gefallen verlängert werden kann. — Man ſehe §. 162. —

β. Horizontalwinkel durch den Meßtiſch abzuſtecken.

Dieſe Aufgabe iſt ſehr wichtig, und dem ohngeachtet durch Hülfe der Sehnentafeln und des beſchriebenen Stangenzirkels leicht zu löſen. An der Schärfe, der mit ihrem Ohre und Hülſe, den Mittelpunct des Tiſches faſſenden Regel (vide Fig. 12) ziehe man eine zureichend lange Linie, ſo lang als möglich, hier m n π, faſſe zwiſchen die Spitze des Centralzapfens des Zirkels, und einer Hülſenſpitze des einen Schenkels, 40 Ruthen, und drücke mit dieſen ſo geſtellten Spitzen, dicht, aber ſanft, an der Schärfe der Regel, ſolches Maß in 2 Puncten m und n aufs Papier, ſtelle die andere Hülſe auf das Sehnenmaß des abzutragenden Winkels, das iſt, für ∟ 85° 18′, auf 54 Ruthen 2 Fuß feſt; reiße aus m mit obiger 40 Ruthenweite der Spitzen, den Bogen β p λ, ſetze den Centralſtift nun in n, und reiße mit der Hülſe des andern Schenkels, welche das Sehnenmaß faßt, einen Kreuzbogen; ſo giebt der Durchſchnitt die Lage des Schenkelpuncts m p für dieſen

Winkel; allein um an den Punct m, nun auch d i e ſ e n a u f d e m M e ß t i ſ c h e auf der Linie m n π abgeſteckten Winkel auch a u f d e r E r d e abſtecken zu können, ſo ſetze man den Centralfuß des Meßtiſches in den auf der Erde befindlichen Punct m, laſſe die Regel unverrückt an der Linie m n π liegen, und drehe, durch Hülfe der dazu eingerichteten Vorrichtung, durch eine Führſchraube ꝛc., oder bey dem Inſtrumente Nr. 21. aus freyer Hand, die ganze Tiſchplatte ſo lange, bis man durch das Fernrohr oder die Dioptern, den in der Linie m n π l in l eingeſteckten Stab, ſcharf in der Länge ſchneidet; ſo wird dieſe auf dem Meßtiſche gezogene Linie, genau über derſelben Linie auf dem Boden, gerichtet ſeyn. Nun ſtelle man die Tiſchplatte durch jene meſſingene Vorrichtung, oder die Schraube e Nr. 23 feſt, lege, wie die Zeichnung ergiebt, die kurze Cathete eines hölzernen Dreyecks ſcharf an die Linie m p x, an die Hypothenuſe dieſes Dreyecks aber ein Linial, und ſchiebe an dieſem das Dreyeck nach + zu fort, löſe die Regel, und drehe ſolche ſo lange behutſam nach + zu, bis ſolche nicht e i n e n Punct, ſondern die ganze Cathete des Dreyecks berührt, das iſt, g a n z gegen a b deſſelben anliegt; ſtelle dann durch die Schraube o, Fig. 17, die Regel in d i e ſ e r Lage feſt, ſo kann man nach der Viſirlinie durch die Dioptern oder das Fernrohr, einen Stab ausſtecken laſſen, welcher den 2ten Schenkel des geſuchten Winkels beſtimmt. Denn die Regel liegt nun völlig parallel mit dem auf der Tiſchplatte gezogenen, den geſuchten Winkel bildenden Schenkel

m p x, folglich muß ſolche einen gleich großen Winkel mit demſelben, bloß auf der Erde liegenden und längern Schenkel m l, bilden. Je länger man auf dem Papiere m p x auszieht, und je weiter alſo das Dreyeck von dem Puncte m, an ſolche angelegt werden kann, deſto richtiger wird die Lage der Regel werden.

§. 196.

Anwendungen dieſer, in den beyden letzten Paragraphen mitgetheilten Sätze, Parallelen auf dem Felde zu ziehen, und durch Hinderniſſe unterbrochene gerade Linien, fortzuſetzen, ꝛc.

Fig. 37. — Zu einer Linie p q, durch einen über derſelben gegebenen Punct +, eine Parallele zu ziehen.

Man errichte nach der Zeichnung, wie bey der Erklärung der Fig. 35. gelehrt worden, 2 möglichſt weit von einander, jedoch auf p q ſtehende Perpendikel, bringe beyde in gleicher Länge, (nach dem Augenmaße,) dem Puncte + in der Höhe ſo nahe als möglich, und ziehe durch dieſe Puncte auf den Perpendikel eine Linie unter (oder auch über) dem Puncte + hinweg; meſſe von ſolcher den Abſtand deſſelben durch einen kleinen Perpendikel, (wie hier von der pun-

ctirten Linie aus) und verlängere (oder verkürze) um ſolchen, die auf p q gefällten Perpendikel; eine durch die dadurch erhaltenen Puncte gezogene Parallele, muß und wird durch den Punct + gehen, und Parallele zu p q ſeyn. Die pag. 229 und ſequ., 6ter Aufgabe angegebenen Methoden, Parallelen auf dem Papiere zu ziehen, finden alle, in Verbindung mit der Anwendung der pag. 228, 5ten Aufgabe, auch Anwendung in der Feldpraxis, und ſind in Fällen zu wählen, wo die jetzt gelehrte Methode durch Local-Hinderniſſe, keine Anwendung findet.

— Im Walde können parallele Schlag-Linien, welche auf einer angenommeuen Linie p q ſenkrecht oder ſchräg gezogen werden ſollen, ſehr bequem, durch Hülfe des Meßtiſches, abgeſteckt werden. Man ſetzt nemlich den Centralfuß deſſelben, in den Punct, aus welchem die eine Linie, zu welcher eine Parallele geſucht wird, ausgeht, viſirt die Regel in p q ein, und zieht eine möglich lange Linie an derſelben; — welche gerade über p q liegen wird; richtet dann die Regel ferner in die, zur Parallele gegebene Linie ein, ſo erhält man den Winkel, welchen ſolche mit p q macht; ſchraubt nun die Regel feſt, zieht eine zarte Linie an derſelben, welche man bezeichnet, und ſetzt nun das Inſtrument mit dem Centralfuß in denjenigen Punct ein, aus welchem die Parallele gezogen werden ſoll.

Darauf bringt man die Regel wieder ſcharf an p q, ſchraubt ſolche feſt, und dreht nun die ganze Tiſchplatte, bis man durch die Dioptern einen in p q

eingeſetzten Stab, ſenkrecht durchſchneidend erblickt; ſtellt dann die Tiſchplatte feſt, und bringt nun zuletzt die Regel an die vorhin gezogene bezeichnete Linie; in dieſer Richtung wird die Regel wieder feſtgeſchroben, und man läßt in ſolcher einen Stab einſetzen, oder die entgegenſtehenden Bäume ſo gleich umwerfen.

Fig. 38. — Eine, durch ein Hinderniß unterbrochene Linie fortzuſetzen.

Auf der Linie af, trifft man ein Hinderniß, einen Sumpf; man errichtet daher bey b, einen Perpendikel von der Länge, daß ſolcher vor dem Sumpfe heraus reicht bis c, und meſſe ſolchen. — Auf bc errichte man wieder einen Perpendikel cd, welcher auch dem Sumpf vorbey reichen muß, und meſſe ſolchen; auf cd wieder einen Perpendikel de, welchen man genau ſo lang, als bc macht, und auf de, wenn man von b nicht nach e ſehen kann, wieder einen Perpendikel, welcher nun die Fortſetzung der unterbrochenen Linie giebt. cd iſt erſichtlich gleich be, der Diſtanz, die man durch den Sumpfe hätte meſſen müſſen.

§. 197.

c. Zugängliche Linien und Winkel unmittelbar zu meſſen.

α. Meſſung der Linien.

Fig. 38* die Linie ag mit der Kette zu meſſen.

Ein Kettenzieher ſtecke ſeinen Kettenſtab in a und laſſe den andern Kettenzieher, welcher b heißen

ſoll, in die Richtung der Linie a g, mit etwas an, gezogener Kette ſich ſtellen; trete dann einen guten Schritt hinter ſeinen Kettenſtab a, und viſire den Kettenſtab b, ſcharf in die zu meſſende Linie, und laſſe von ſolchem die Kette auf folgende Art ſcharf an, ziehn. b legt; die beyden mittelſten Finger der rechten Hand, an der Kettenſtabsſpitze unter die Kette, den Zeigefinger oben darüber, und den Daumen um den Stab, welchen er überdieß noch ohngefähr in der Mitte, mit der linken Hand faßt; wirft oder ſchlenkert nun behutſam 3 — 4 mal die Kette in der geraden Linie, bis er ſieht, daß ſolche völlig gerade liegt, wobey er dieſelbe zugleich ſtraff anzieht; ſetzt dann in dieſer Spannung den Kettenſtab ſenkrecht (ja nicht die Spitze vor oder rückwärts oder zur Seite gedrückt, die Linie wird ſonſt zu lang oder zu kurz, oder ſchief) in den Boden, und läßt den Kettenzieher a, nachſehen, ob der Kettenſtab b, noch in der geraden Linie ſtehe, ſonſt muß ſolches verbeſſert werden; ſteht der Stab recht, ſo hebt ihn b heraus, und ſteckt ein Zeichenſtäbchen, vide Fig. 5, deren er 10 Stück in einer umgeſchnallten Kapſel trägt, in das Loch; tritt einen Schritt zur Seite, und geht mit raſchen 24 — 25 Schritten nach g zu, wohin ihn a folgt; die Kette muß dabey ſchleifen, nicht übereinander gezogen, und ſtets ſorgfältig darnach geſehen werden, daß ſich keine Gelenke ꝛc. verſchlingen, und die Füße nicht krumm biegen. Iſt a bey dem Zeichenſtäbchen in b angekommen, ſo nimmt er ſolches heraus, ſteckt ſolches

in eine ebenfalls dazu umgeſchnallte Taſche, und ſetzt den Kettenſtab in das Loch b; richtet darauf den andern Kettenzieher wiederum nach g ein, wie vorhin, und ſo gehts fort, bis a g gemeſſen iſt; des letzten Kettenzuges einzelne Ruthen, Fuße und Zolle bis g, werden zu der Anzahl der Ruthen, welche die Kettenzüge (jeder beträgt 5 Ruthen) ergeben, hinzugerechnet, ſo erhält man das Maß von a g. Dabey ſind folgende wichtige Vorſichten zu beobachten, daß der Geometer niemals ſich die Länge einer gemeſſenen Linie oder die Anzahl der Zeichenſtäbchen, welche a geſammelt hat, angeben und aufzählen laſſe; ſondern die Linie ſelbſt abnehmen, und die Anzahl der Zeichenſtäbe des a, mit derjenigen Anzahl, welche b, etwa noch in der Kapſel hat, vergleiche, ob beyde zuſammen 10 Stück ausmachen; denn ſonſt kann a, die von demſelben angegebene Anzahl Stäbchen wirklich richtig haben, aber doch auch eins oder etliche verloren ſeyn, und man bemerkt es dann nicht; die Linie wird folglich gleich um 5, 10 ꝛc. Ruthen zu kurz.

Aber auch b kann ein Zeichenſtäbchen verloren haben, dann kömmt man bey der folgenden Linie gewöhnlich zu kurz, wenn man es nicht zum Geſetz macht, bey jedesmaliger Meſſung einer neuen Linie die 10 Stück heraus zu zählen. Iſt eine Linie länger als 50 Ruthen, ſo geht a zu b, und holt, nachdem er ſolches zuvor dem Geometer angezeigt, und dieſer ſich überzeugt hat, daß a wirklich ſchon alle 10 Stäbe habe, dieſe Stäbe bey a ab, der Geometer

notirt dieſe Wechslung, und das Meſſen geht wieder fort. Ueber Hecken, hohe Steine ꝛc. muß die Kette an den Kettenſtäben ſenkrecht in die Höhe gezogen werden; geht der Zug aber über Hohlungen, ſo hält man Stangen unter die Kette; auf dergleichen Umſtände, kann man faſt nie zu genügende Aufmerkſamkeit verwenden; es entſtehen oft Fehler, man weiß nicht wie, und gewöhnlich wird alle Schuld dem Winkelmeßinſtrumente beygelegt.

Krumme Linien,

werden im Felde wie auf dem Papiere, durch Abſciſſen und Ordinaten gemeſſen, gerade wie ſolches in der Berechnung der Figuren gezeigt iſt. Man mißt die Ordinaten mit der Meßruthe im rechten Winkel, welches auch das Abſchlagen genannt wird. Auch nennt man die Abſciſſen die Längen, und die Ordinaten die Breiten, der durch ſolche abgeſchnittenen und beſtimmten Puncte; ſo lange die Abſciſſen oder Längen innerhalb der Figur bleiben, wird ihr Maß mit + bezeichnet, ſo bald ſolche außerhalb fallen, aber mit —; ſo lange die Ordinaten oder Breiten länger werden, wachſen, werden ſolche mit +, jede Abnahme gegen die nächſt vorhergehende, aber mit — bezeichnet.

β. Meſſung der Horizontalwinkel.

aa. Durch Kette und Stäbe.

Dieſe geſchieht am bequemſten und ſchärfſten durch Mitbenutzung unſerer Sehnentafeln; es ſteht darü

ber vor ſolchen im Gebrauchsunterrichte, das Nöthige angegeben. Man ſteckt ſich auf beyde Schenkel der Winkel, 40 Ruthen ab, und mißt von einem dieſer Puncte zum andern, diejenige Linie, welches die Sehne des Winkels iſt; deren Maß in den Tafeln aufgeſchlagen, ſogleich den Winkel in Graden, Minuten und Secunden darneben finden läßt.

bb. Meſſung und Aufnahme der Winkel durch Gebrauch des Meßtiſches; ſo wohl für den Fall der Beybehaltung der Regel am Mittelpuncte, als auch bey der ſonſt gewöhnlichen Fortlegung derſelben, von Punct zu Punct. — Auch Einiges über das Centriren der Winkel.

αα. Aufnahme und Meſſung der Winkel, am Mittelpuncte.

Der Meßtiſch wird durch ſeinen Centralfuß, mitten über den Scheitelpunct des zu meſſenden Winkels, gebracht: und nach einer, von denen der Tafel III. ſub Nr. 13 und 14, angegebenen Waſſerwage, genau horizontal geſtellt.

Dieſes letztere geſchieht durch das Höher- oder Niedrigerſtellen der Beine; — bey der Vorrichtung Nr. 21., allein durch die Beine; bey der, Nr. 15. aber, durch ſolche aus dem Groben, und dann durch die Schrauben der Füße C $\pi\pi$, vollkommen.

Steht der Tiſch wagrecht, ſo werden die Schraubenmütter der Vorrichtung Nr. 21 und 23, hh,

und die, von Nr. 16 in A, cc zu Nr. 15 zugehörigen der Füße, behutſam und genügend angezogen; ich halte es für nützlich, die ganze Manipulation des Horizontalaufſtellens in der Kürze noch herzuſetzen, und werde mich nachher ſtets darauf beziehen.

Man lege die Hände unter das Kreuz der Scheibe, hebe ſo den ganzen Tiſch über den Winkelpunct, und laſſe den Centralfuß nur 2—3 Zoll in das Loch des Punctes eindringen, indem man die Scheibe ſchwebend horizontal bilancirt und ſo leiſe und unverrückt, auf die andern Beine ruhend, nieder läßt; dann werden die Spitzen der Beine behutſam und gleichmäßig ſo tief in den Boden eingedrückt, bis der bisher faſt nur ſchwebende Centralfuß, mit ſeiner Scheibe die Erde berührt. — Er iſt mehr zum Haltungsſtabe des Winkelpunctes und der gleichen Inſtruments-Höhe, als zum Tragen des Inſtruments beſtimmt, — und nun wird bey der Vorrichtung Nr. 21, durchs Nachſtellen des einen oder des andern Beines, wie ſolches die Waſſerwage verlangt, die Platte vollkommen horizontal geſtellt; bey Nr. 15. aber, ergänzt man das Fehlende dieſer Stellung, durch die bequeme Schraubenvorrichtung der Füße C, in $\pi\pi$; worauf zuletzt jene Schraubenmütter b, und cc, angezogen werden, wie ſchon erwähnt worden iſt.

Bey dieſer Stellung und Befolgung des Nachſteſtehenden, erhält man nun ſicher Horizontalwinkel.

In der Erläuterung der Fig. 36, wurde gezeigt, wie ein aufgetragener und gemeſſener Winkel, durchs

Viſir der Regel, abgetragen oder abgeſteckt werden könne; hier iſts gerade der entgegengeſetzte Fall, daß ein Winkel aufgenommen und gemeſſen werden ſolle; das Verfahren, bleibt mit unbedeutenden Veränderungen, daſſelbe. Der, durch Stäbe abgeſteckte Winkel, heiße m π δ, in π ſtehe das Inſtrument. Man richte nun zuerſt die Regel nach dem Stabe m oder δ, (hier einmal nach m) und ziehe die Linie m π mit möglichſter Schärfe; viſire dann nach δ, und ſtelle die Regel feſt; hierauf trage man auf m π, 40 Ruthen ab — wo man will, hier zum Beyſpiel von n n nach m — lege dann die lange Cathete eines Dreyecks, gegen die feſtſtehende Regel, an die Dreyecks Hypothenuſe aber ein Linial, und ſchiebe das Dreyeck mit jenem Catheten an den Punct m, ziehe m x, trage auch von m auf m x, (nach p) 40 Ruthen, und meſſe die Sehne p n n, ſo wird man neben ihrem Maße in den Sehnentafeln, das Maß dieſes Winkels, welcher wegen des Abtragens durch die Parallele, ſo groß als der aufgenommene und zu meſſende ∟ m p δ iſt, finden. Noch einfacher wird dieſes Verfahren, wenn die Schärfe der Regel, und der von ihr durchſchnittene Mittelpunct, frey iſt; dann braucht man gar nicht abzuſchieben, ſondern trägt 40 Ruthen auf m π, ſo wie dieſes Maß längs an der Schärfe der Regel ſelbſt, aus dem Centro ab, und mißt die Sehne wie vorhin. Um dieſes zu erzielen, laſſe ich mir jetzt die Hülſe unterhalb der Regel befeſtigen, und ſolche, die Tiſchfläche ebenend, ſich um den verſenkten Zapfen,

in einem Ausſchnitte drehen, und in die Mitte der Hülſenplatte, wird ein hart ſtählernes Plättchen eingeſetzt, auf welchem ein eingegrabener Punct, die Achſe des Zapfens, das Centrum, bezeichnet; und vor demſelben erhält die Regel einen kleinen=, einer Stecknadel=Dicke, weiten Einſchnitt, um deſto bequemer aus dem Centro, Maßen abſetzen zu können.

ββ. Die gewöhnliche Aufnahme der Winkel, durch Fortlegung der Regel.

Es ſey, wie Fig. 12 * zeigt, ein Winkel abc mit Stäben abgeſteckt, um ſolchen aufzunehmen, ſo ziehe man ſich auf der Tiſchplatte, an einer ſchicklichen Stelle, eine willkürliche, möglich lange Linie, ax; wähle auf ſolcher den Winkelpunct b, welcher durch einen 2ten Schenkel, den aufzunehmenden Winkel bilden ſoll; und richte dieſen Punct durch die Zange A, oder Hacken B, (indem man den ganzen Tiſch ſo lange hin und herſtellt, biſs der Zweck erreicht iſt) mittelſt des von ſolchen herabhängenden Lothes, über jenen Winkelpunct b, ſo, daß man durch die Diopteru der Regel, welche letztere ſcharf an ax gelegt ſeyn muß, zugleich den Stab in x beynahe ſchneidet. — Die Zange A, wird mit der Spitze a genau an den Punct b gerückt, und dann durch die, durch den untern Arm gehende Schraube, welche gegen die Unterfläche des Meßtiſches drückt, feſtgeſtellt; bedient man ſich aber des Hackens

B, ſo ſteckt man eine, mit einem Knöpfchen von Siegellack verſehene zarte ſtählerne Nadel, in den abzulothenden Punct b, ſchiebt den Hacken, welcher oben in einem vorgelegten Stücke Meſſing, einen Einſchnitt hat, wie g zeigt, an die Nadel, und lothet dann auf dieſelbe Art, wie vorhin den Punct b des Papiers, über den Winkelpunct b, auf der Erde, ab. — Die, ſchon bey dieſem Geſchäfte nach einer aufgeſetzten Waſſerwage vorher ziemlich gut horizontal geſtellte Meßtiſchplatte wird nun um ihren Zapfen, mit der unbeweglich an a x liegen bleibenden Regel, vollends genau — indem man durch die Dioptern ſieht — auf x eingerichtet, und dann behutſam feſtgeſtellt; das, was ſich das Zangenloth dadurch wieder, vom Puncte b, entfernt, iſt für die gewöhnlichen Fälle der Ausübung, ganz unbedeutend. Nun lege man die Regel ſcharf an den Punct b, und drehe ſolche, ſtets hart an derſelben gehalten, ſo lange, bis man durch die Dioptern den Stab c des 2ten Schenkels, ſcharf ſchneidet, und zieht dann an der Regel eine durch b gehen müſſende Linie b c, ſo hat man den, unter dem Meßtiſche auf der Erde befindlichen Winkel a b c, jetzt auf dem Meßtiſche, und kann ſolchen durch Benutzung der Sehnentafeln, meſſen. Sollte man mehrere mit einander zuſammenhängende, nemlich Grenzwinkel, meſſen, als ∟ a b c, ∟ b c d, ∟ c d e ꝛc. und ſolche mit der Länge ihrer Schenkel, als den Grenzlinien auftragen; ſo müßte man jetzt aus b nach c, die mit der Kette gemeſſene b c abſtecken, und wenn man den Punct c (um den

∟ bcd zu meſſen) über den Bodenpunct, welcher wie alle andere Winkelpuncte der Art, der Stationspunct, und die Linien zwiſchen ſolchen, Stationslinien, heißen, ablothet, ſo muß die Regel ſcharf an bc gelegt, und wie vorhin die Linie ab nach dem Stabe b, ſo jetzt dieſe nach dem in b einzuſetzenden Stabe, durchs Drehen der ganzen Tiſchplatte, eingerichtet werden. Dann viſirt man, die Regel ſcharf an den Punct c gelegt, nach d, zieht cd, läßt cd meſſen, und trägt das Maß aus c auf dieſer Linie ab; und ſo gehts fort bey allen übrigen Winkeln.

Hat man eine ſogenannte Orientir-Baußole, wie in f Fig. 15. an den Tiſch angebracht; — ein längliches Käſtchen, mit einer wenigſtens 4—5 Zoll langen Magnet Nadel, welche allgemein für ſolche kleine Meſſungen, als unverändert nach Norden, (welche Gegend mit N bezeichnet); einſpielend angenommen werden kann, folglich ſtets Parallel-Richtungen bildet; — ſo kann man das Zurück-Einrichten erſparen; darüber im IIten Abſchnitt ein Mehreres.

γγ. Das Centriren der Winkel. — vide pag. 305. —

Tab. IV. Fig. 1. Man kann in dem Winkelpuncte

1ſter Fall { B, kein Inſtrument aufſtellen, um den ∟ ABE zu meſſen; aber von irgend einem Puncte in der Gegend D, nach A und nach E ſehn, und meſſen; wie iſt nun der Winkel ABE auszumitteln?

Man trage die eine Linie AB, aus B nach C, ſtecke in A und C, Stäbe ein, und trage dieſelbe Weite AB aus B, auch noch irgend einem Puncte in D, von welchem nach A und C viſirt werden kann; ſo erhält man im ∟ADC, wegen der gleichen Radien, AB, BC, BD, einen Peripheriewinkel, und im ∟ARC einen Centriwinkel; wird alſo ∟ADC gemeſſen, und ſein Maß duplirt, (vide §. 166) ſo ergiebt ſich der Winkel ABC. Dieſe Methode iſt ſehr oft anwendbar, und bequem.

Tab. III. Fig. 2. Man kann nicht aus dem Winkelpuncte, aber aus einem demſelben ſehr nahe oder entfernt liegenden Puncte, nach den Schenkelpuncten hinſehen, als von A nach B und C; wie erhält man nun den ∟BDC?

Liegt der Punct A, dem Puncte D ſehr nahe; ſo ſuche man denſelben dergeſtalt zu wählen, daß eine von ihm nach D gezogene Linie AD, mit AC oder AB, einen rechten Winkel bilde; meſſe dann ∟BAC, und BA, AC und DA; ſo kann man in dem rechtwinklichten Dreyecke, Dreyeck b, (wenn DA ſenkrecht auf AB ſteht) den Winkel ADB, durch trigonometriſche Berechnung finden, und eben ſo im △a, (wenn man ∟BAC als einen erhabenen, der alſo mehr als 180 Grad mißt, nach ſeiner Aufnahme in Graden betrachtet und

beſtimmt, und von ſolchem den R Winkel DAB abzieht, alſo der Winkel DAC übrig bleibt, aus dieſem und den bekannten ihn einſchließenden Seiten CA, AD, den Winkel CDA, als das 2te Stück des ∟BDC, berechnen; ∴ ∟BDA + ∟CDA = den geſuchten ∟CDB.

Auf dem Papiere verlängere man BA nach x' und meſſe ∟CAx, ſo ergiebt ſich das Supplement, vom ∟BAC, deſſen Maß, mit dem nach obiger Vorſchrift erhaltenen, übereinſtimmen muß; alſo zur Probe dient.

Iſt aber A entfernt vom Winkelpuncte D ſo meſſe man ∟: BAD und ∟DAC; ſo wie BA, AD, AC; dann erhält man auch 2 Seiten und einen eingeſchloſſenen Winkel zur trigonometriſchen Berechnung der ∟ADB, und ∟ADC, welche addirt, ∟BDC geben.

Taf. III. Fig. 3. Man kann aus B nach A, aber nicht nach C, auch nicht aus einem, dem B gegenüberliegenden, aber wohl aus einem ohngefähr in D befindlichen Puncte nach B und C hinſehen, wie findet man den Winkel ABC?

3ter Fall.

Man meſſe ∟ABD und ∟BDC; AB, BD, DC; verlängere auf dem Papiere DB, meſſe ∟ABx und berechne ∟CBD trigonometriſch, ſo ergiebt ∟ABx + ∟CBD von 180 Grad abgezogen, den ∟ABC.

Bey dieſem Falle muß man wohl unterſcheiden,

„ob der eine Schenkel des zu beſtimmenden Win-„kels ABC, oberhalb, wie jetzt, oder unter-„halb der von D nach x verlängerten Linie Dx „falle, als aB;“ Statt ∠ ABD, wird dann ∠ aBD gemeſſen, das übrige wie vorhin; und nun zum Winkel aBD, der ∠ CBD addirt, ſo ergiebt ſich ∠ aBC.

Taf. III. Fig. 4. Man kann nur aus 2 nahen Puncten D und E, von D nach B und E nach C hinſehen; wie findet man ∠ ABC?

4ter Fall.

1. Meſſe man ∠ ABD, ∠ BDE, ∠ DEC, und die ſolche bildende Linien, AB, BD, DE und EC.
2. Berechne man in dem Dreyecke DEC, den ∠ π, und addire ſolchen zum gemeſſenen ∠ BDE; ſo ergiebt ſich ∠ BDC.
3. In dem Dreyecke DBC, berechne man ∠ φ, ziehe ſolchen von 180 Grad ab, ſo bleibt ∠ xBC übrig, und zieht man ∠ ABD von 180° ab, bleibt ∠ ABx übrig; allein ∠ ABx + ∠ xBC iſt ja gleich dem geſuchten Winkel ABC.

Tab. III. Fig. 5. Man kann nur aus D und E, nach B und C ſehen, wie findet man den Winkel ABC?

Die Aufloͤſung iſt faſt ganz ſo, wie die, des vorhergehenden Falles. Man meſſe

1. die Winkel ABD, BDE, DEC; und AB, BD, DE und EC; und berechne

2. die Winkel π und λ, addire ſolche, und ſubtrahire ſie von 180°, ſo bleibt der ∟xBC, übrig; und ſubtrahire ∟'ABD von 180°, ſo bleibt ∟ABx übrig; ∟ABx + ∟xBC, iſt aber gleich den geſuchten ∟ABC.

Fällt der Schenkel AB aber oberhalb DBx, nach Ba, ſo ſubtrahire man ∟aBD von 180 Grad ſo bleibt der ∟xBa, übrig; nun ∟xBa und ∟CBD, von 180° ſubtrahirt, giebt den Winkel aBC. Man wird ſehen, welche nützliche Dienſte die Kenntniß der Lehrſätze von den Nebenwinkeln, leiſtet.

cc. Meſſung der Höhen und Tiefenwinkel, in ſo fern und ſo genau ſolche, hier zur Ausmittelung der Horizontallinien und der Höhe der Berge, des ohngefähren Gefälles ꝛc. aus gemeſſenen Neigungswinkeln und der ſchrägen Berglinie, gemeſſen werden müſſen.

Der Gebrauchsunterricht der angeſchloſſenen Reductionstafel für dieſen Gegenſtand, muß mit dieſer Anleitung zuſammen ſtudiert und benutzt werden. Da nur Horizontal-Linien, welche die Grundriſſe der Gegenſtände darſtellen, nach dem Vorhergehenden in Zeichnung kommen können; ſo iſt die Reduction, der ſchiefen Linien eines abhängenden Bodens auf ſolche, ſehr nothwendig. Man ſteckt, um dazu die nöthigen Data zu erhalten, auf, oder in, jede Erhöhung oder Vertiefung, welche eine merklich bedeutende Abweichung von dem Puncte,

wo man ſich befindet, anſchaulich machen muß, eine Abſichtstafel ein, und viſirt aus jedem Winkelpuncte, nach vorheriger Horizontalſtellung des Tiſches, den Neigungswinkel gegen die nächſte Station ab; alſo Fig. 39, aus A nach Nr. 1, d. i. mit dem Inſtruments-Viſir, von b nach a. Hader Aufſatz keine Kippregel, wie Fig. 21, ſo muß man, ſo oft Tiefenwinkel (auch Depreſſionswinkel genannt,) vorkommen, alſo bergab viſirt werden muß, durch die untere Pinnacide, p, Nr. 24, alſo von l nach k, Fig. 21, viſiren, oder in die Tiefe gehn, und den Winkel von da meſſen.

Fig. 39, und obiger Gebrauchs-Unterricht der Reductionstafel, werden die nöthige übrige Erläuterung geben. Nothwendig iſts bey ſolchen Meſſungen, ſich ein Schema einer Tabelle, zum Eintragen der gefundenen Stücke, und Nebenſtellung der Reſultate, zu entwerfen; ich habe in nachſtehendes, nur die Station 1 — 2 eingetragen.

Bemerkungen.	Stationen. von	Winkel, + ſteigen, — fallen.	Hypothenuſe.	reducirte Horizontale	zunehmende Perpendikel.	abnehmende Perpendikel.
	A — 1					
	1 — 2	8°	20°5′	12°3′7″		

Zieht man am Ende die Summe der fallenden, von der Summe der ſteigenden Perpen-

dikel ab, ſo ergiebt ſich die Verſchiedenheit der Höhe der Puncte A und B, oder, wie viel Gefälle B gegen A habe, alſo höher liege.

§. 198.

B. Unzugängliche Weiten auch in der Entfernung zu meſſen.

Ohne die Kenntniß der Lehren der Congruenz und Aehnlichkeit der Dreyecke und Figuren überhaupt, würden ſich die Geometer bey ſolchen Auflöſungen ſehr verlegen fühlen; durch dieſe iſt man aber im Stande, nicht allein Diſtanzen von ungeheurer Länge mit einer ſehr großen Genauigkeit zu meſſen, ſondern auch beſonders Abkürzungen und Erleichterung der Meßgeſchäfte, von außerordentlicher Bedeutung, ſich zu verſchaffen. Hier iſt es zureichend, nur die am häufigſten vorkommenden Fälle der Auflöſung durch die Kette und Stäbe, und einige für die Auflöſung durch den Meßtiſch, aufzuſtellen.

a. Meſſung unzugänglicher Linien, durch Kette und Stäbe.

Fig. 40. Die Entfernung der Puncte A und B,

1ſter Fall. zu meſſen; zwiſchen beyden liegt ein Hinderniß, daß man nicht von A nach B, aber von einem 3ten Orte, ohngefähr C, nach beyden ſehen und meſſen kann.

Man ſetze ohngefähr gegen die Mitte von AB,

den Stab C; meſſe AC und BC, und trage beyde Maßen, jede, in der rückwärts verlängerten Linie, genau nach D und E fort; ſo wird DE, das Maß von AB ergeben. Könnte man keine ſo lange Linien rückwärts tragen, ſo kann man auch, gleichartige Bruchtheile von AC und BC, z. B. ſo wohl $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ꝛc., von dem Maß der Schenkel AC, BC, aus C rückwärts oder vorwärts tragen; und die zwiſchen den Endpuncten dadurch erhaltene Linie, wäre dann auch $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ꝛc. von AB, wie die Zeichnung ergiebt. Man hat nemlich dadurch ein congruentes Dreyeck von derſelben Größe oder $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ ꝛc. Größe, als des △ABC, abgeſteckt; denn ∟x und ∟y ſind einander gleich, und die Schenkel, welche den Winkel einſchließen, ſind einander gleich, oder einander, durch das $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ ꝛc. nehmen, proportionirt; alſo im 1ſten Falle hat man ein congruentes, in dem letztern, ein ähnliches Dreyeck. — Man vergleiche §. 123, 3ter Lehrſatz, und §. 147, 3ter Lehrſatz der Congr. und Aehnlichkeit. — Weit richtiger und kürzer, findet man AB trigonometriſch. Es wird nemlich AC und BC, ferner durch Hülfe der Sehnentafeln, auch ∟ACB, gemeſſen, und nun nach dem trigonometriſchen Lehrſatze geſchloſſen: „die Winkel verhalten ſich wie die ihnen gegenüber„liegende Seiten;“ alſo Sin. ∟B : Sin. ∟x = AC, AB, folglich ergiebt ſich die Formel zur Auflöſung

$$\frac{\text{Sin. x AC}}{\text{Sin. B}} = \text{AB.}$$

AC meſſe 42 Ruthen, alſo der Log. = 3.6232493
der ∟ x meſſe 60°, alſo der Log. = 9.9375306

13.5607799

Der ∟ B meſſe 29° 33′ — — — 9.6930080

3.8677719

AB alſo = 73 R. 7 F. 5 Z.

Fig. 41, 2ter Fall } Die Weite AB, zu meſſen.

Man ſuche eine Brücke, ſo nahe als möglich an AB, zu treffen; errichte ſich eine ſenkrechte Linie über AB, nach g aus B und nach l aus A; letztere ſo lang daß man von l über die Brücke nach Bg meſſen könne; trage dann die Länge Al nach Bc, und meſſe gc und gl, ſo wird $\sqrt{(gl^2 - gc^2)}$ = cl ſeyn und da cl = BA, alſo auch die Entfernung dieſer Puncte dadurch gefunden. — Vergl. mit Zuſatz §. 162, pag. 299.

Fig. 42, 3ter Fall } die Diſtanz AB zu meſſen, wenn man nur zu dem einen Puncte A kommen kann.

Man ſtecke neben A, einen Sab in D, ferner einen Stab in C, meſſe AC und DC; trage AC in verlängerter Linie nach F, und eben ſo DC nach E; und ſtecke zu den 2 Puncten EF, einen 3ten in grader Linie ab, welcher auch mit BC in gerader Linie ſteht; nemlich G; ſo wird nach den Lehrſätzen der Congruenz, welche man ſich, ſo wie die der Aehnlichkeit der Dreyecke, bey ſolchen Fällen

lebhaft vergegenwärtigen und dieſelben anzuwenden ſuchen muß, auch GF = AB ſeyn. Denn der ∟ CFE = ∟ CAD, alſo ∟ v = ∟ CFG, als gleichen ergänzenden Nebenwinkel; und ∟ z = FCG, als Verticalwinkel AC = CF; da man alſo 2 Dreyecke, in welchen eine gleiche Seite zwiſchen 2 gleichen Winkeln liegt, durch △ CGF zu △ ABC, erhielt, ſo waren ſolche congruent (vide pag. 217. 5ter Lehrſatz) und alle Seiten einander gleich. Trigonometriſch hätte man weit ſchärfer und kürzer AB auf die Art gefunden: CA nemlich verlängert, den ∟ w = ∟ v als Scheitelwinkel, ſo wie den ∟ z und die Linie AC gemeſſen, und daraus nach dem bekannten trigonometriſchen Lehrſatze AB berechnet.

Fig. 43, die Entfernung AC zu meſſen, wenn
4ter Fall { man gleich nicht zu A noch zu B, kommen kann.

Man wähle eine Standlinie, ſie ſey CD, halbire ſolche, und ſtecke einen Stab in die gefundene Mitte E. Ferner willkürlich in die Linie CA, den Stab F, und in DB den Stab G; trage die Länge FE nach e, GE nach g, in rückwärts verlängerter Linie, und viſire in x und y 2 Stäbe dergeſtallt ein, daß x mit Cg und BE, ſo wie y mit De und AE, in gerader Linie ſtehen: dann wird xy = AB ſeyn. Der Beweis iſt leicht. — Nach dem 3ten Lehrſatze der Congruenz, überzeugt man ſich von der Congruenz der Dreyecke 1 und 2,

ferner 3 und 4 alſo der Dreyecke ACE und yDE, ſehr leicht; und eben ſo bald vom △ 5 und 6, 7 und 8, folglich auch von der Congruenz der Dreyecke xCE und BDE. Da nun ∟ AEB = ∟ xEy, und AE=Ey (als Seiten der unter ſich congruenten Dreyecke), BE=Ex aus gleichem Grunde; ſo muß auch die 3te Seite xy = AB ſeyn.

b. Meſſung unzulänglicher Weiten durch den Meßtiſch.

Fig. 44; die Entfernung des Punctes A von B zu meſſen.

*) Man ſtelle den Centralfuß in einem vor AB, ohngefähr in B zu wählenden Punct; ziehe eine, ohngefähr mit AB gleichlaufende Linie ab, viſire nach A, und ſchiebe durch das Dreyeck und Linial, welches erſtere mit der langen Cathete gegen die Schärfe der unverrückt ſtehen bleiben müſſenden Regel, behutſam angelegt wird, die Neigung der Linie AC, an irgend einen Punct; hier

*) Anmerk. Wir werden alle Aufgaben, ſtets durch die hier angegebenen Meßtiſche Nr. 15. und 21. welche die Regel am Mittelpuncte führen, auflöſen; ſolche alſo ſtillſchweigend ſtets zum Gebrauch anwenden.

an c, nach cx ab. Nun wird eben ſo CB abviſirt und an c nach cy abgeſchoben, davon CA und CB gemeſſen, und das Maß von CA nach einem verjüngten Maßſtabe aus c auf cx nach cd, ſo wie das von CB nach Ee, abgeſetzt, und de gezogen; man hat alſo ein ähnliches △ zu ACB, in welchem alle Seiten eben ſo viel Ruthen, Fuße ꝛc. des kleinen verjüngten Maßes, als die Seiten des großen △ ABC in großem Maße enthalten; folglich zeigt die Anzahl der Ruthen des kleinen Maßes der Linie de die Anzahl der Ruthen ꝛc. des großen wirklichen Kettenmaßes von AB, oder die geſuchte Diſtanz an. Mißt man den Winkel ACB oder xcy, und bezeichnet durch ihn und die gemeſſenen 2 Seiten, AB trigonometriſch, ſo ergiebt ſich ſolches noch ſchärfer.

Fig. 45. Die Entfernung des Punctes A von B zu meſſen; wenn man ſo wenig zu A, als zu B, kommen kann.

Man ſtecke ſich eine ſolche Standlinie ab, welche weder zu ſpitze noch zu ſtumpfe Winkel (durch Kreuzdiagonalen) mit A und B, bildet; und meſſe ſolche genau mit der Kette. Das Maß dieſer Standlinien, wird nun, wenn man den Centralfuß des Tiſches in a oder b eingeſetzt, den Tiſch horizontal geſtellt, und aus b nach a, oder aus a nach b viſirt, und an der, in dieſer Richtung feſtgeſtellten Regel eine Linie xy gezogen hat, auf dieſe gezogene Linie nach einem verjüng-

ten Maßſtabe, bequem abgetragen; nemlich wenn der Centralfuß unter a ſteht, ohngefähr von d aus nach c; man viſirt dann nach A, und ſchiebt die Neigung Aa an c nach e, durch Dreyeck und Linial, wie bekannt iſt, ab; eben ſo viſirt man nach B, und ſchiebt dieſe Richtung nach cf ab. Nun wird der Meßtiſch aufgehoben, und in den 2ten Stationspunct nach b, gebracht, horizontal geſtellt, die Regel ſcharf an die gezogene Stationslinie xy gezogen, die Tiſchplatte gelößt, und ſo lange gedreht, bis man durch die Dioptern, den in a eingeſteckten Stab, ſcharf einviſirt, folglich die auf dem Meßtiſche gezogene Linie, genau über die Stationslinie auf der Erde, gebracht hat. Man ſtellt das Tiſchplatt nun wieder unbeweglich feſt, viſirt wie vorhin nach A und B, und ſchiebt dieſe Richtungen an die Puncte der verjüngten Stationslinie cd, in der gehörigen Lage, das iſt, bA nach de, und bB nach df, ab; ſo werden die ſich kreuzende Diagonalen, Durchſchnittspuncte bilden (— z. B. hier in e und f) deren Diſtanz von einander, das verjüngte Maß von AB geben wird; ſo viel Ruthen ꝛc. alſo ef nach dem verjüngten Maßſtabe mißt, ſo viel Ruthen ꝛc. muß AB im großen Maße meſſen. Man muß nur ſehr vorſichtig ſeyn, die Standlinie wo möglich lang genug, und ſo wählen, daß die Winkel an derſelben, möglichſt nahe an 60 Grad kommen. Die Durchſchnittspuncte werden ſonſt zu unbeſtimmt, da ſich die Linien zu lang ſchneiden. Auch bey die-

ſem Falle zeichnet ſich der Nutzen der trigonometriſchen Berechnungen, aus. Man kann nemlich außer der ſchon gemeſſenen Standlinie cd, noch die Winkel ecd und edc meſſen, und dadurch ed berechnen; ferner noch ∟ fcd meſſen und daraus fd berechnen; zuletzt den Winkel edf, meſſen, und nun im △ edf, die Seite ef ebenfalls berechnen.

II. Abſchnitt.

Von der geometriſchen Aufnahme ſelbſt.

1. Unterricht, den Umfang jeder planimetriſchen Figur, ohne Berückſichtigung ihrer etwaigen innern Eintheilung ꝛc. aufzunehmen.

§. 199.

Einige nützliche und nothwendige Vorbereitungs- und Verhaltungs-Lehren.

Auch die einfachen Figuren, kommen jeden Anfänger, wenn er ſolche im Freyen aufnehmen ſoll, als ein ſehr weites Feld, deſſen Aufnahme mehrere Vorkenntniſſe erfordere, als er ſich auf dem Pa-

plere erworben habe, vor; und zaghaft, iſt er unſchlüſſig, „wohin, und wo er ſeine Stäbe ausſtekken müſſe.“ Aber nur Muth gefaßt! und ſich anfänglich nur ganz an das Nachfolgende dieſer Lehren gehalten, ſo wird man finden, daß die geometriſche Aufnahme, bey den uns bereits in dieſem Buche erworbenen Vorkenntniſſen, nicht ſo ſchwer ſey.

Genaue Kenntniß der aufzunehmenden Figur, ſowohl nach ihrem Umfange, als der äußern und innern Beſchaffenheit des Bodens, welche die Aufnahme begünſtigen oder erſchweren können, iſt das erſte, wornach man ſich bemühen muß; eine halbe Stunde auf dieſen Gegenſtand vor der Vermeſſung ſelbſt, verwandt und gehörig benutzt, erſpart ſtundenlange nachherige, oft fruchtloſe Bemühungen, in dem es uns in den Stand ſetzt, die zweckmäßigſte, kürzeſte und zuverläſſigſte Methode, zu wählen und nach ſolcher mit Zutraun zu arbeiten. Nur der ſchlecht Unterrichtete, wird ſeine Stäbe ohne ein Weiteres ſogleich ausſtecken, und die Kette herumſchleppen laſſen, ehe er einen, ihm überzeugend genügenden Plan, über die ganze Aufnahme der Figur, welche er noch nicht kennt, ruhig und nach Grundſätzen in ſeiner Schreibtafel, entworfen hat. Anfänger übereilen ſich hierin gewöhnlich, ſie haben eine falſche Scham, und glauben, in Gegenwart anderer Perſonen, bey ſolchen Geſchäften den Verdacht der Ignoranz zu erzeugen, wenn ſie nicht ſogleich die Vermeſſung an

ſingen, ſondern zuvor ein Räumchen Zeit zum Ueberlegen verwendeten; angelegentlich und gutmeynend, warne ich für dieſen äußerſt nachtheiligen Fehler; Vernachläſſigung meines Rathes, der auf ſo vieljährige Erfahrung als Vernunftgründe ſich ſtützt, wird unausbleiblich durch die nachtheilichſten Folgen (auch bey anſcheinlich unbedeutenden Vermeſſungen) gerächt werden.

Man umgehe daher mit Grenzkundigen Leuten, die ganze Figur, und entwerfe ſich zu gleicher Zeit eine kleine Handzeichnung von dem ohngefähren Laufe der Umfangslinien, mache Notizen, in welchen Stellen wahrſcheinlich ein Abſteckſtab nützlich ſeyn werde, wo Moraſt ꝛc. innerhalb oder außerhalb befindlich, und welche Art der Aufnahme — die im nachſtehenden §. §. vorkommen werden — im vorliegenden Falle anwendbar und die Zweckdienlichſte ſey. Jene Handzeichnung heißt ein Brouillon, und muß beſonders die aus und eingehenden Theile und Winkel nach dem Augenmaße möglichſt genau, darſtellen. Ein gutes Hülfsmittel, die Länge der Linien, und Größe der Winkel ziemlich gut zu treffen und dem Augenmaße zu Hülfe zu kommen, ſind folgende Beobachtungen. Man ſchreite ſich auf 5 Ruthen ſeiner Meßkette ſo ein, daß gerade 25 Schritt, noch beſſer wegen der Theilbarkeit der $\frac{1}{4}$ Ruthen, 24 Schritt, ihre Länge ausmachen; ſchreite dann bey jeder Vermeſſung die anſcheinlich längſte Linie, welche in den Brouillon gezeichnet werden muß, und überrechne, wie-

viel ſolche ohngefähr Ruthen meſſe; ziehe ſich auf dem Brouillon-Blade, oben an, eine Linie, etwas kleiner als die Breite ꝛc. des Papieres, theile ſolche in die, durch Schritte gefundene Anzahl gleicher Ruthen, und mache ſich auf einer 2ten darunter gezogenen Linie, von 10 zu 10 jener Ruthen, einen flüchtigen Maßſtab, deſſen erſter Theil 10 einzelne Ruthen, die nachfolgenden jeder ſtets 10 Ruthen, enthalten. Man mag nun die Linien bloß nach Schritten, oder beym Meſſen ſelbſt, nach dem wirklichen Maße, aufs Brouillon bringen, ſo bemüht man ſich ſolche nach bloßem Augenmaße von obigem Maßſtabe abzunehmen; es iſt unglaublich, wie weit man es darinn durch Uebung bringen kann. Die Größe der Winkel hingegen, lernt man recht gut treffen, wenn man den einen, auf dem Papiere gezogenen und ſchon beſtimmten Schenkel, an deſſen Endpunct ein Winkel geſetzt werden ſoll, in die Linie, welche ihn bildet, durchs Drehen des Papieres, einrichtet, das Papier in dieſer Richtung feſthält, und nun den Bleyſtift nach dem 2ten Schenkelpunct zu, auf das Papier ſenkrecht geſtellt, einviſirt, und nach dieſer Richtung eine Linie an den Scheitelpunct zieht. Uebung wird hierin ſehr bald Gewandheit verſchaffen. Die Maßen der Stationen, und Grade der Winkel ſchreibt man nicht auf die, im Brouillon befindlichen Linien, ſondern die erſtern auf beſonders dazu gezogene gerade Linien, (wie Fig. 17 * zeigt) Station zu Station; als von a nach b, von b

nach c, und zwar ſtets das ganze Längenmaß vom Anfangspuncte der Linie bis zu jedem Perpendikel, z. B. von a nach x, 8° 8′, nicht aber die Länge zwiſchen 2en Perpendikeln als, x und y, dieſe betrügen hier nur 2° 3′. Durch das Aufſchreiben der Fußmaße der gemeſſenen Stationen auf beſondere Linien, gewinnt man mehr Raum und Freyheit, um, wenn — was oft geſchieht — bey kleinen Diſtanzen viele Maßen zu notiren ſind, dieſe ungezwungen und deutlicher aufſchreiben zu können; denn diejenigen Geometer, welche alle Maßen ins Brouillon tragen, kommen oft mit ihren Zahlen äußerſt ins Gedränge, und entſteht bey der geringſten Vernachläſſigung eine ſolche Confuſion, wodurch die ganze, oder doch der größte Theil der Vermeſſung unbrauchbar wird. Die Größe der Perpendikel, wird, wie die Zeichnung ergiebt, im rechten Winkel zur Seite geſchrieben. Noch muß ich bemerken: daß die Längen oder Abſciſſenmaßen, nach dem Gange der Meſſung, das iſt hier, von a nach b zu, die Ruthen ſtets nach a zu ſtehend, weil von a nach b gemeſſen worden ſeyn ſoll, geſchrieben werden müſſen; es hat dieſes ſeinen großen Nutzen. Ferner, gewöhne man ſich niemals die Ruthen, Fuße und Zolle, über den Zahlen zu bezeichnen; ſondern nehme einmal für allemal an, „daß Zolle, das kleinſte Längenmaß, welches man bey Stationsmeſſungen aufnimmt, ſey, folglich ſtets die letzte Decimalſtelle in den Zahlen einnehmen, jede Zahl in dieſer Zahlſtelle, alſo ſchon

ohne Bezeichnung, Zolle andeuten könne, un- eben ſo, da in der Geometrie alles nach Decimal-Maß gemeſſen wird, auch die Fuße und Ruthen in den höhern Decimalſtellen. Kommen etwa nicht alle Sorten dieſer Maßen vor, ſo ſetzt man in die Decimalſtelle, für deren Sorte keine Zahl da iſt, eine Null. Es wird daher, 31605, geleſen 316°0′5″; und 800 geleſen 8°0′0″; ferner 33, als 3′3″. Durch dieſe ſtillſchweigende Bezeichnungen, werden alle Verwechslungen der Zeichen verhütet. Zu der Bemerkung der Horizontal-Winkel, entwirſt man ſich ebenfalls ein eigenes kleines Täfelchen, in welchem die ein- und ausſpringenden Winkel, der eine mit plus +, der andere mit minus — Zeichen, bezeichnet, und jeder mit der Nummer der Station, und noch ſicherer überhaupt, durch 3 Buchſtaben, deren mittelſter den Winkelpunct angiebt, z. B. + ∟ a b c, den ausgehenden Winkel des Stationspuncts b, mit ſeinen Stationsſchenkeln a und c, angedeutet wird. Außerdem erhält das Täfelchen noch eine beſondere Columne, um Bemerkungen wegen der Winkelaufnahme machen zu können. Man kann das Brouillon und Winkeltäfelchen, größentheils auf einer, und die, zu den Stationsmaßen gezogenen Linien-und wieder eine Columne zu andern Bemerkungen, auf der andern gegenüberbefindlichen Seite eines aufgeſchlagenen Quart- oder Foliobuches, beyeinander haben, welches ſehr bequem iſt. Im Brouillon kann man die beobachtete Methode der Meſ-

ſung, „ob aus dem Umfange, der Mitte ꝛc. verzeichnen, und dieſes als Handführer beym Meſſen ſelbſt, gelten laſſen; ich rathe daher ſchließlich „nicht allein im Brouillon den ganzen ausgedachten Gang der Vermeſſung, in Linien gezeichnet darzuſtellen, ſondern, daß Anfänger ſich die Ordnung der Ausführung, und die beſte Art und Weiſe der Behandlung dieſer und jener Stücke der Aufnahme, vor dem Anfange der Meſſung, bedächtlich aufſchreiben: denn oft wird beym Geſchäfte ſelbſt (alles ſtrengen Verbotes ohngeachtet, welches man geben muß) dennoch von gegenwärtigen Perſonen geſchwatzt, die Witterung incommodirt ꝛc. ſo, daß man nicht ſtets gleichbleibend ſcharf blickend, die zweckmäßigſte Behandlung aller Stücke, zu treffen im Stande iſt. — Die angrenzenden Nachbarn, ſo wie die Lage der Figur gegen die Weltgegend, müſſen neben der Zeichnung mit angemerkt werden.

§. 200.

A. Aufnahme des Umfangs der Figuren, mit Kette und Stäben.

Fig. 6. Ein gleichlaufend krummes Akkerſtück aufzunehmen, und deſſen Inhalt zu berechnen.

Man errichte über a c das Parallelogramm a b d c indem man aus a und c die Perpendikel bis an die 2te Furche mißt; ſo wird ein gleiches krummes Stück hinzu und wieder abgeſchnitten, und Pargr. a b d c =

dem Bogenſtück c d g b a h. *) Ferner meſſe man die Dreyecke a b f und c d e, und addire dieſe 3 Stücke zuſammen, ſo erhält man den ganzen Inhalt. Um die Figur aufs Papier auftragen zu können, ſo müſſen über a c mehrere Perpendikel errichtet, das Maß von der Grundlinie bis an die erſte, und dann bis an die 2te Furche gemeſſen, und nach ſolchem, wie ſich nun leicht ergiebt, das Ganze nach dem verjüngten Maßſtabe aufgetragen werden.

Fig. 7. Ein mehreremale, aber gleichlaufend, ſich krümmendes Ackerſtück, zu vermeſſen.

Die Zeichnung lehrt, daß dieſe Aufgabe, ganz wie die vorhergehende behandelt und aufgelößt werde.

Fig. 8 und 9. Ein ungleich ſich krümmendes Ackerſtück zu vermeſſen.

Nach Fig. 8, ziehe man ſich, wie die punctirten Linien angeben, Sehnen, zu Grundlinien von Paralleltrapezen, oder Parallelogrammen; berechne ſolche wie bekannt; meſſe dann die übrigen kleinern Stücke, als Δ e k n, Trapez k n g f, Δ g h l, Δ h m i, und addire ſolche.

Nach Nr. 9. aber, errichte man ſich ohngefähr, von 5 zu 5 Ruthen Länge, Perpendikel auf a b, um dadurch die krummen Linien in ſolche Stücke zu zerſchneiden, welche für gerade Linien angenommen werden können; meſſe aber die Perpendikel, wie vor-

*) Daß d b g hier kleiner als c a h, in der Zeichnung erſcheint, laſſe man ſich nicht irren; in der Ausübung wird ſelten ein Stück vorkommen, welches einen 5 Ruthen tiefen Bogen hat; und ſelbſt bey dieſen, würde jene Abweichung unmerklich bleiben.

läufig, bey Erläuterung der 6ten Fig. gelehrt worden: alſo z. B. den Perpendikel g i; zuerſt wird das Maß g h bemerkt, dann das ganze g i, und nun g h von g i abgezogen, um h i zu bekommen, und ſo alle übrigen; — es ergeben demnach c d, e f, h i, k l, m n, n o, Seiten von Paralleltrapezen, deren jedes die Länge von a x, x g, hier 5 Ruthen) zur Höhe hat; mäße c d = 3°, e f = 5; ſo ſagt man nach pag. 339: $\frac{3+5}{2} = 4$, und $4.5 = 20$, alſo c d e f = 20°; und berechnet ſo alle übrigen Stücke; — dieſe Methode iſt die vorzüglichſte. Das Errichten der Perpendikel, geſchieht bey dieſen kleinern Diſtanzen, durch das bloß rechtwinklichte Anlegen der Meßruthe, an die Linie a b, und das Fortmeſſen in dieſer Richtung, bis an die letzte Furche; man kann anch an die Enden der Ruthe, Schenkel zum Herausſchlagen im rechten Winkel, anbringen laſſen; dann mißt man noch ſichrer; doch iſt auch bey dem bloßen Gebrauch eines geübten Auges und Hand, ſolches unnöthig. Wenn die Krümmungen nicht über 5 Ruthen von a b abſtehen (als g h nur 5 Ruthen lang,) welches man dadurch ausmittelt, daß ohngefähr vor der tiefſten Krümme, wie hier bey g h, zwiſchen die Endpuncee a und b ein Stab einviſirt, und g h gemeſſen wird; ſo kann man, wenn nicht außerordentliche Schärfe erfordert wird, auch die Stücke der Perpendikel von der Grundlinie a b, bis an die erſte Furche, ganz weglaſſen, gleich in der erſten Furche rechtwinklicht anlegen, und c d, e f,

h i ꝛc. meſſen, welche nun natürlich, die, in den beygeſetzten punctirten Linien angegebene veränderte Lage, erhalten. Der Fehler, welchen man durch den Gebrauch der krummen Linien begeht, kann man aber noch verbeſſern. Auf 100 Ruthen Länge der Sehne a b, und 5 Ruthen Krümmenabweichung g h, iſt die krumme Linie der erſten Furche, nur um 5 Fuß länger als a b; bey 3 Ruthen Abſtand g h, und wieder 100 Ruthen Sehne, aber nur 2 Fuß, und bey 1 Ruthe g h, nur 2 Zoll. Bey 200 Ruthen Länge a b, und 5 Ruthen g h, iſt der Unterſchied kaum 3 Fuß, bey 3 Ruthen g h, aber nur 1 Fuß. Zur Verbeſſerung des begangenen Fehlers, addire man die ſämmtlichen Perpendikel, c d, e f, h i ꝛc. und dividire ſolche durch ihre Anzahl — hier durch 6; gäben ſolche 360°, dann $\frac{360}{6} = 60°$ zum arithmetiſchen Mittel. Dieſe Mittelzahl wird nun mit dem Unterſchiede, welchen man zwiſchen der krummen und geraden Linie gefunden hat, multiplicirt, und dies erhaltene Product, an Ruthen und Fußen, von dem erhaltenen Inhalte der ganzen Figur ſubtrahirt. Die Ausmittelung der Differenz der krummen und geraden Linie, iſt durch die Anwendung der Silberſchlagiſchen Proportionsrechnung, ſehr leicht. Man hat z. B. eine Linie a b, von 50 Ruthen Länge, g h =4 Ruthen, wie groß wird die Differenz zwiſchen dieſer geraden und der dazu gehörigen krummen Linie

ſeyn? also,	100°	5′	
beträgt	5°	50°	Fac. 2 Fuß;
die Differenz hier 2 Fuß; dieſe	*	4	

mit obigen 60 (z. B.) multiplicirt, gäbe 12°00′, dieſe müßten nun von dem ganzen Inhalte abgezogen werden; — es ſetzt aber obiger Anſatz der Perpendikel, ſchon ſehr große Gebreiten voraus; bey einem, einige Acker haltenden Stücke, würde die Differenz kaum 1 Ruthe betragen.

Fig. 10. Eine Figur aus einem, innerhalb derſelben liegenden Puncte aufzunehmen.

Dieſes ſetzt voraus, daß man aus einem Puncte alle Ecken der ganzen Figur nicht bloß ſehen, ſondern ungehindert, ziemlich horizontal hinmeſſen, ſo wie die Umfangslinien a b c d e f, ſelbſt meſſen könne. Aus dem ſchicklichſten Puncte o, laſſe man dann in alle durch Abſteckſtäbe bezeichnete Umfangspuncte, die Linien o a, o b, o c ꝛc. ſo wie die Umfangslinien ebenfalls nacheinander, und zwar, wenn die Figur krumme Grenzlinien hat, mit den nöthen Ordinaten oder Perpendikeln, meſſen. Mit Benutzung des §. 154 und 155, kann man dann die Figur ſehr leicht nach einem verjüngten Maßſtabe aufs Papier auftragen und berechnen.

Fig. 11. Aus einer, innerhalb einer Figur anzunehmenden Standlinie, (oder 2 mit einander zuſammenhängenden Standlinien) ſolche aufnehmen ꝛc.

Die Zeichnung der Figur ſelbſt, und die Erläuterung der 10ten Figur, ergeben das Ganze. Es wird

die ganze Figur von den Standpuncten AB aus, in Dreyecke zerlegt, die ſämmtlichen Linien (auch die Umfangslinien mit den etwa erforderlichen Ordinaten mit eingeſchloſſen) gemeſſen, ſo wie NB. AB ſelbſt; und an eine verjüngt, auf das Papier abgeſteckte Linie, AB, jene ſämmtlichen Maßen durch Dreyecke, angetragen, und dann die erhaltene Figur berechnet.

Dieſe Methode iſt ſehr nützlich und anwendbar, wenn man aus 2 oder 3 innerhalb liegenden Puncten, die ganze Figur überſehen und übermeſſen kann, bey 3 Standpuncten, muß man natürlich die 2te Standlinie, und NB. auch den Winkel, welchen ſolche mit der 1ſten Standlinie bildet, meſſen, und auftragen.

Fig. 12. Eine Figur durch Diagonalen meſſen.

In alle Puncte der Figur, werden, wie die Zeichnung ergiebt, Stäbe geſteckt, und alle Diagonalen gemeſſen, welche die Figur in zuſammenhängende Dreyecke zerlegen. Ueberdieß iſt es aber Nothwendigkeit, noch eine beſondere, ſo genannte Probe-Linie, (welches ich hier für Nr. 10 und 11, und überhaupt, mitgeſagt haben will) zu meſſen, welche man gern von den entfernteſten Puncten, wie hier ad, und daß ſolche möglichſt mitten durch die Figur geht, nimmt. Iſt nun die ganze Figur aufgetragen (ohne die Probelinie dabey zu benutzen) ſo muß dieſe, zum Beweiſe, daß richtig gemeſſen und aufgetragen worden iſt, genau das verjüngte Maß,

des aufgenommenen mit der Kette, meſſen; das iſt, a d auf dem Papiere, gleich ſeyn a d im Felde. Die Triangularmeſſung mit der nöthigen Aufmerkſamkeit vorgenommen, gewährt ſehr viele Genauigkeit; allein ohne Probelinien zu ziehn, iſts auch die unzuverläßigſte; da ſich ein Fehler, von Dreyeck zu Dreyeck fortpflanzt.

Fig. 13. Ein Stück Wald umgänglich in ſeinem Umfange aufzunehmen.

Haupt-Regel iſt bey jeder Aufnahme, möglichſt wenige Linien und Winkel zu erhalten, alſo auch hier. An die Hauptecken des Waldes ſtecke man Abſteckſtäbe oder Meßfahnen, ſo nahe als möglich, meſſe nicht bloß die Linien a b c d, mit den etwa nöthigen Ordinaten; (als Abſchlägen, um etwa die an der Grenze liegenden Blößen, von einiger Bedeutung mit anzubinden) ſondern (nöthigenfalls durch Verlängerung derſelben in den Scheitel oder Nebenwinkeln) auch die Umfangswinkel ∟a b c, ∟b c d, ∟c d e, ∟d a b. Man ſieht, wie nützlich ſich auch hier die Lehre von den Neben- und Scheitelwinkeln, §. 115 und 118, beweiſe; man mißt ∟f a e, weil man ∟d a b, wegen des Holzes nicht meſſen kann; eben ſo ∟a b g, oder ∟c b h, und ſubtrahirt ſolche von 180, um ∟a b c zu finden ꝛc.

Fig. 14. Ein Teich, wird auf dieſelbe Art aufgenommen, und deſſen krummer Umfang, durch Ordinaten, an die Standlinien, in welche man ſolche

einſchließt, beſtimmt. Das Auftragen beyder Figuren, ergiebt ſich aus der Natur der Linien und Winkel, von ſelbſt. Man zeichnet z. B. den ∟ a b c, (Fig. 13) mit langen ausgezogenen Schenkeln, zuerſt, ſteckt dann a b und b c nach dem verjüngten Maßſtabe ab, und trägt an ſolche mit Dreyeck und Linial die etwa gemeſſenen Ordinaten, deren Endpuncte zuſammen gezogen werden. An a oder c wird nun wieder der gemeſſene ∟ b a d oder b c d, geſetzt, dann a d und c d abgetragen; treffen dieſe in einem Puncte zuſammen, oder doch ſehr nahe dabey, ſo iſt die Figur richtig gemeſſen und aufgetragen, im Gegentheile aber, in dem einen oder dem andern Stücke gefehlt, und man muß zuerſt, die Richtigkeit des Auftragens prüfen; iſt hier nicht gefehlt, ſo ſummirt man — nach pag. 241, Zeile 5, und §. 168 — die innern Winkel der Figur, und vergleicht ſolche mit der Anzahl der rechten Winkel, oder der Anzahl Grade, welche ſolche nach obigen Erörterungen der Theorie, meſſen müßten; das gefundene Uebermaß, wird durch die Anzahl der Winkel — hier z. B. 4 dividirt, — der Quotient von jedem Winkel abgezogen; und dann mit dieſen verkleinerten Winkeln die Figur aufs neue aufgetragen, wo ſich ſolche nun — für den Anfänger und die gewöhnlichen Fälle — genügend, ſchließen wird. Das vortreffliche Däzelſche, von mir empfohlene Buch, giebt beſonders eine weit vorzüglichere Art der Berichtigung an. Der etwaige Defect an Graden, wird ebenfalls durch die Anzahl der Winkel dividirt, der Quotient

dann aber jedem Winkel zugelegt ꝛc. — Dieſe Berichtigung ſetzt voraus, daß bey allen Winkeln um gleich viel geſehlt iſt, welches der Unvollkommenheit der Werkzeuge beygemeſſen werden kann!

§. 201.

B. Aufnahme des Umfangs, mittelſt des Meßtiſches.

Bey den Aufnahmen durch dieſes Hülfsmittel, gelten alle die Berückſichtigungen ꝛc., welche ich bey der Aufnahme durch Kette und Stäbe, ſo ernſtlich empfohlen habe. Es kommen aber ſelbſt noch mehrere hinzu, welche eines Theils zwar mehrere Aufmerkſamkeit erfordern, andern Theils aber die Arbeiten ſelbſt ſehr erleichtern, abkürzen und zuverläſſiger machen. Darunter gehört beſonders die ſorgſamſte Stellung und Behandlung des Inſtruments im Ganzen, eine gehörige Gewandheit der Manipulation beym Viſiren, Linienziehn ꝛc. ſo wie die gehörige Reduction der ſchrägen Linien. Dieſes, und alles übrige ſchon gewiß ſo äußerſt deutlich Geſagte und Gelehrte, ſetze ich als vollkommen verſtanden, und die Kenntniß und natürliche Geſchicklichkeit, ſolches, auch ohne Aufforderung von mir, bey dieſen Aufnahmen gehörig anwenden zu können und zu wollen, voraus; und kann und werde ich mich deshalb nun möglichſt kurz faſſeu, um noch ein Paar Blätter für ei-

nige Berichtigungsfälle, „in Unordnung gerathener Grundſtücke“, und zu einer ganz kurzen Anleitung zum Zeichnen und Illuminiren geometriſcher Grundriſſe, zu erſparen.

Da wir unſere Meßtiſche in Verbindung mit unſern Sehnentafeln, auf zwiefache Art, einmal zum eigentlichen Zwecke deſſelben, die Figuren ſogleich bey der Aufnahme auch in Zeichnung auf dem Tiſche zu erhalten, und zweytens, auch als bloßes Winkelmeßinſtrument, gebrauchen können, ſo ſoll hier ein zwiefacher Unterricht der Aufnahme mitgetheilt werden.

a. Aufnahme durch den Meßtiſch als Meßtiſch.

Fig. 15. Aus einem Standpuncte der Mitte der Figur, ſolche aufzunehmen.

Man wähle den Standpunct ſo, daß man nicht zu ſtumpfe und nicht zu ſpitze Winkel erhalte. Stelle den Centralfuß, in den gewählten Punct, richte den Tiſch völlig horizontal (dieſes will ich nun zum letztenmale erwähnen) viſire in alle Winkelpuncte, und trage an einen, auf einer, an der Schärfe der Regel gezogenen Linie willkürlich angenommenen Punct f, alle dieſe Winkel (wie aus dem Vorhergehenden bekannt iſt), durch Dreyeck und Linial, ab; meſſe ferner alle Linien vom Centralfuße bis in die Umfangspuncte, oder nur eine derſelben, (z. B. a o) und dann alle Umfangslinien; und trage die gefundene Maßen

nach dem verjüngten Maßſtabe, auf die, an den Punct f, angetragene Linien gehörig auf; die zuſammengezogenen Endpuncte, ergeben den Umfang der Figur. Dieſe Methode gewährt ſehr viele Genauigkeit und Zeiterſparniß, da das Inſtrument nur einmal aufgeſtellt zu werden braucht.

Fig. 16. Durch eine, innerhalb der Figur zu ziehende Standlinie, dieſe Figur aufzunehmen.

Daß dieſes Verfahren ganz daſſelbe, nur bey 2en, 3en ꝛc. Standpuncten, ſo viele man zu Standlinien nemlich wählte, jedesmal in jedem Puncte zu wiederholende der vorhin gezeigten Auflöſung der Aufnahme aus einem Standpuncte ſey, wird jedem ſogleich einleuchten; (bloß Meſſung der Standlinie (n) und Auftragung derſelben, muß noch hinzukommen) und glaube ich ſolche daher bloß wegen ihrer großen ausgebreiteten Anwendbarkeit und Nützlichkeit, nebſt angeſchloſſener Erinnerung an das, was ich über die vortheilhafteſte Wahl der Standlinie, in wenigen Worten geſagt habe, ohne weitere ſpecielle Erläuterung empfehlen zu können — auf das möglichſt ſcharfe Einviſiren, wenn man den Centralfuß in A ſtehn hat, nach B, und umgekehrt aus B nach A, will ich noch aufmerkſam machen.

Fig. 17. Aus dem Umfange — oder wie man ſolches auch zu nennen pflegt, umgänglich — aufzunehmen.

Dieſes kann auf zwiefache Art geſchehen:

1. Daß alle Winkel und Linien unmittelbar aus allen, und zwiſchen allen Umfangswinkelpuncten, aufgenommen und gemeſſen werden; oder

2. wird die Figur, wie die Zeichnung ergiebt, durch möglichſt wenige, und zweckdienlich gewählte Standlinien eingeſchloſſen, und aus ſolchen und ihren Puncten, die Umfangslinien und Umfangswinkel, beſtimmt. Dieſe Methode iſt allgemein zuverläſſiger, kürzer, und beſonders bey Waldungen anwendbarer, als Nr. 1.

Hier bey der Aufnahme Fig. 17, ſind 5 Standtlinien a b, b c, c d, d e, e a gewählt, und alſo ſchon 2 Winkel weniger, als in dem Umfange vorhanden zu meſſen. Will man bey a anfangen, ſo ſtelle man den Meßtiſch, nachdem a b zuvor mit allen, bis an die Grenzlinien A B und B C zu fällenden Ordinaten, um die Krümmen zu erhalten, gehörig gemeſſen und beſonders aufgeſchrieben worden iſt, in dieſem Puncte horizontal auf und gebe der Regel eine ſolche ſchickliche Lage, daß die, mit der Richtung der Schärfe parallel zu ziehende a b, auch der Lage und Geſtalt der Figur angemeſſen, gezogen werden könne. Drehe hierauf die Tiſchplatte mit der freyen Hand, oder durch Hülfe der meſſingenen Vorrichtung bey Nr. 15. Tafel II., ſo lange, bis b einviſirt iſt, ſtelle ſolche dann feſt, und trage die, mit dem Stangenzirkel abgenommene Linie a b, aus einem, zum Beyſpiele in a, Fig. 15. derſelben Tafel, gewählten Puncte ab, indem man die Hülſenſpitze des einen

Schenkels in a ſetzt, die Spitzen der beyden Hülſen des andern Schenkels aber, zwiſchen welchen das Maß von a b gefaßt iſt, hart an die Schärfe der Regel nieder drückt, und 2 Puncte x und y dadurch bildet; dann aber die Schenkel des Zirkels feſtſtellt, und nun die Spitze, welche in x ſtand, nach y bringt, die aus y aber wieder hart an der Regel in z niederſetzt, wodurch die Spitze des unverändert gebliebenen andern Schenkels, aus a nach b kömmt, und a b = x y = y z und da x u = y b, alſo auch a b parallel mit x y z oder der Schärfe der Regel, folglich mit der, unter ihr ſenkrecht auf dem Boden liegenden, einviſirten Standlinie a b, wird. Man hätte auch mit Dreyeck und Linial, die Parallele an a b, abſchieben können, dann aber die Länge dieſer Linie, aus a nach b beſonders abſtecken müſſen, das erſtere Verfahren iſt einfacher und richtiger. Bloß aus dem Grunde habe ich hier dieſe Arten, der ſchon in dem Iſten Abſchnitte dieſes practiſchen Theils gelehrten Methode des Abtragens, ſo völlſtändig und einleuchtend wiederholt, um dadurch im Zuſammenhange einleuchtender zu zeigen, wie man durchs Viſiren der Diagonalen nach ſchon aufgenommenen Puncten, Proben für die Richtigkeit der Meſſung, und zwar durch Parallelen, welche zwiſchen der Viſirlinie und den gleichliegenden und gleich benannten Puncten der Zeichnung Statt finden müſſen, erhalten könne; wovon in der Folge das Nöthige geſagt werden ſoll.

Iſt nun die Standlinie a b, auf dieſe Art gehö-

rig aufgezeichnet, ſo laſſe man die Tiſchplatte unverändert feſt ſtehn, und drehe bloß die Regel nach B, ſtelle ſolche wieder feſt, und trage auch dieſe einviſirte Linie a B, durch eine Parallele mittelſt Dreyeck und Linial, oder dem Stangenzirkel an den gezeichneten Punct a an, und ziehe ſolche lang aus; dann drehe man die Regel nach A, trage auch dieſe einviſirte a A, an den Punct a, und ziehe ſolche aus. Eben ſo viſirt man nun nach e, und trägt auch e a des Bodens an a der Zeichnung, und läßt dann dieſe Linie mit ihren Ordinaten meſſen, welches zuſammen auf a e gehörig abgeſetzt, und dadurch die Umfangslinie G A, beſtimmt wird. Ferner läßt man a A genau meſſen, und ſetzt dieſes Maß auf der Linie a A, von a nach A ab, ſo iſt der Umfangspunct A der Zeichnung, ebenfalls mit dem Puncte A des Bodens, parallel liegend, wie vorhin a der Zeichnung gegen a des Bodens, beſtimmt. Um ſich zu überzeugen, daß der Meßtiſch noch unverrückt ſtehe, ſo viſirt man wieder nach b; liegt die Regel noch ſcharf mit a b parallel, ſo iſt die Winkelaufnahme richtig. Da man ſich nun aus dem nächſten Standpuncte, b, nach a wider einviſiren muß, weil dieſe der eine Schenkel zum aufzunehmenden Winkel a b c iſt; ſo markire man ſich an den äuſſerſten Enden der Regel, mit zweyen, hart an der Schärfe derſelben gezogenen Strichelchen, die jetzige Richtung derſelben, wie ſolche nach b einviſirt wurde, und ſetze nun den Meßtiſch in b ein; drehe die Regel nach a zu, ſcharf an jene 2 Strichelchen, ſtelle

ſolche feſt, und wende dann die Tiſchplatte ſo lange, bis a durch den ſenkrechten Strich im Glaſe des Fernrohres oder des Diopter-Fadens, mitten durchſchnitten erſcheint; worauf auch die Platte wieder feſtgeſtellt wird, man nennt dieſes ſich rückwärts einrichten, einviſiren. Aus b werden nun die Puncte B, C und c, abviſirt (D aber aus dem Grunde nicht, weil der Winkel D b c an der Standlinie b c zu ſpitz ausfallen würde) ihre Richtungen gehörig an b angetragen, b C und b c, die letztere mit ihren Ordinaten, gehörig gemeſſen, und auf die an b getragenen gleichnamichten Richtungslinien, aus b abgeſetzt.

Zuletzt viſirt man wieder nach a und nach c, um den richtigen unverrückten Stand des Tiſches zu erforſchen, zieht in der letztern Richtung nach c, wieder ein Paar kleine Striche an die Schärfe der Regel, und geht nun nach c. In c viſirt man ſich wieder rückwärts nach b ein, wie vorhin aus b nach a; viſirt dann nach D, E und d, läßt c D und c d meſſen (letztere mit ihren Ordinaten) und trägt ſolches gehörig an den Punct der Zeichnung c, ab. Darauf wird wieder der Stand des Meßtiſches durchs Viſiren nach b, erprobt; ferner nach d viſirt, die Strichelchen gezogen, und in d der Tiſch aufgeſtellt. Daſelbſt wieder nach E, F, und e viſirt, und ihre Richtungen abgetragen, wo die Viſirlinie d E, die aus c erhaltene und gezogene Viſirlinie ſchneiden, alſo den Punct E, beſtimmen wird, ſo wie die ſich ſchneidenden Linien a B und b B, den Punct B be-

ſtimmten; wodurch man bey letztern, die Linien AB und BC, und bey erſtern, die Linien DE und EF ohne Meſſung erhielt, folglich bey den 2 Standlinien ab und bc, die Meſſung 2er Linien erſparte. Aus d würde man bloß, wenn FG eine gerade Linie wäre, dF zu meſſen, ja ſelbſt nur nach F, zu viſiren nöthig haben, da e, als der letzte Punct zum Schluſſe der Figur, ſchon aus a, feſt-gelegt iſt; allein, um die Krümmen von FG zu erhalten, muß man auch noch de meſſen, und mit dF gehörig auf die Richtungslinie aus d, abtragen; welches zugleich, wenn das Maß der Linie de genau oder doch ſehr nahe bey e trifft, eine Probe für die Richtigkeit der Meſſung ergiebt. Der Winkel aed, braucht alſo gar nicht aufgenommen zu werden; will man es thun, ſo dient es zu einer zwiefachen Probe.

Nicht aber bloß beym Schluſſe der Figur, ſondern auch ſchon früher, können begangene Fehler entdeckt werden, wenn das Locale Diagonallinien zu viſiren, erlaubt; oder, wenn man eine Orientir-Bouſſole mit gebraucht.

Durchs Viſiren von Diagonalen, Proben anzuſtellen, ſoll die Ergänzung der Erläuterung, Fig. 15, anſchaulich lehren. Es ſey von e nach a, von a bis b, bereits gemeſſen, und Linien und Winkel aufgetragen worden: ſo viſirt man in b, (z. B.) nach e, ſtellt die Regel feſt, und zieht durch die aufgetragenen Puncte be, eine Linie; läuft ſolche mit der Schärfe der Regel parallel, welches man

durch Dreyeck und Linial, oder gleich lange Perpendikel prüft, ſo iſt von e bis b, kein Fehler begangen; im Gegentheile aber, iſt gefehlt, und muß ſolches aufgeſucht und verbeſſert werden; denn ſo wie nach dem Vorhergehenden, a b der Zeichnung, mit a b des Bodens, parallel gezogen iſt, ſo muß auch die gleichnamichte Linie b e der Zeichnung, mit der des Bodens, b e, welche die Schärfe der Regel darſtellt, parallel ſeyn.

Die Probe durch die Orientirboußole, iſt kürzlich folgende: Man laſſe gleich vor der Feſtlegung der erſten Linie, die Magnetnadel obiger, am Tiſchblatte, oder der Regel, befeſtigten Boußole, durch Drehung der Platte, ſcharf nach Norden einſpielen, und ziehe dann erſt die erſte Linie; ſo bald man ſich nun in den folgenden Stationen rückwärts einviſirt hat, ſo muß auch, wenn keine Fehler begangen ſind, die Nadel ſo gleich, ohne die geringſte Richtung, ſcharf nach Norden, einſtehn.

Auch das Zurückeinviſiren, kann man erſparen, wenn man (nach vorherigem Einſpielen der Magnetnadel vor Feſtlegung der erſten Linie wie vorhin verlangt wurde) in derjenigen Station, in welcher man am Zurückviſiren gehindert wird, oder nicht viſiren will, die Tiſchplatte bis zum Einſpielen der Nadel, nach Norden dreht, und dann feſtſtellt; macht man die Probe in einer Station, welche das Zurückviſiren erlaubt, und ſieht durch die Dioptern, ſo wird man ſich, wenn die Regel ſcharf an die rückwärts einzurichtende Linie gelegt iſt, eben

ſo gut, als durchs Zurückviſiren ſelbſt, eingerichtet finden. Der Grund von dieſer Hülfsleiſtung der Nadel, liegt in ihrer magnetiſchen Eigenſchaft, daß ſie ſich ſtets nach Norden in unveränderlicher Richtung, kehrt; in allen Puncten alſo gleiche feſte Richtungen, welche folglich mit einander parallel laufen, bildet; wie Fig. 16. anſchaulich zeigt.

Mittagslinien mit und ohne Magnetnadel zu ziehen.

Die genaue Erklärung der Mittagslinie, gehört für die mathematiſche Geographie; wir wollen von ſolcher bloß einen kurzen Begriff geben, und dieſelbe ziehen lernen. Bekanntlich dreht ſich die Erde in 2 feſten Puncten, (als gleichſam in Angeln) welche man den Nord- und Südpol nennt, um ihre Achſe. Denkt man ſich nun durch ſeinen Ort, und die beyden Pole, eine Linie gezogen, ſo wird ſolche die Horizontalfläche dieſes Ortes, doch durchſchneiden; und dieſe durchſchneidende Linie heißt die Mittagslinie. Die Magnetnadel beobachtet zwar beſtändig gleiche Richtung, zeigt aber nicht ſcharf nach Norden, ſondern weicht weſtlich, in mehrere Meilen von einander gelegenen Orten einige Grade von der Mittagslinie ab. Iſt dieſer Abweichungswinkel auch nur für einen, in der Nähe liegenden Ort bekannt, ſo laſſe man die Magnetnadel einſpielen, ziehe mit der Nordlinie, welche ſie andeutet, an der langen, mit ſolcher parallel laufen müſſenden Seite des Käſtchens, eine Parallele, nehme auf ſolcher einen

Punct an, und ſetze den Abweichungswinkel an ſolchen; dieſer erhaltene Schenkel ergiebt die wahre Mittagslinie, welche bey Stellung der Sonnenuhren, und in ökonomiſchen, beſonders forſtlich ökonomiſchen Rückſichten ziehen zu können, nützlich und nothwendig iſt. Fig. 16. α, zeigt der Pfeil die Richtung der Magnetnadel, und NS, die, durch Anſetzung eines Abweichungswinkels von 18 Grad, erhaltene wahre Mittagslinie. Obgleich jeder Ort ſeine eigene Mittagslinie hat, ſo genügt es doch, nur die, eines der nähern Oerter, durch Kenntniß des Abweichungswinkels der Magnetnadel beſtimmen zu können. Ohne Magnetnadel, zieht man ſolche an jedem Orte durch Hülfe des Sonnenſchattens auf folgende Art: Wäre dieſe Linie für Fig. 16, anzugeben, und cd die freyliegendſte bequemſte Stationslinie, ſo ſtelle man in ſolcher — es ſey bey π — den Meßtiſch horizontal, reiſſe ſich, wie in Fig. 16 *, mehrere, ohngefähr 1 Schuh Durchmeſſer haltende Kreiſe, errichte im Centro, ſenkrecht einen Stift, und beobachte, wenn das Ende des Sonnenſchattens von ſolchem, ſich des Vormittags in den Kreiſen (wie hier in 1. 2. 3.) endigt; welche Stelle mit einem Pünctchen genau bemerkt wird. Eben ſo werden Nachmittags die Endpuncte der Schatten, in den Kreiſen, (bey 4. 5. 6.) bemerkt, die Sehnen (als 6 und 1, 5 und 2, 4 und 3.) werden halbirt, und von einem dieſer Mittelpuncte durchs Centrum eine Linie gezogen, welche, je vollkommener ſolche durch alle Mittelpuncte der

Sehnen geht, deſto vollkommener ſie die wahre Mittagslinie für den Ort angiebt. Hat man auch außerhalb der Linie c d, aber doch in der Nähe derſelben, die Mittagslinie durch ein anderes horizontal geſtelltes Brett, gefunden, ſo legt man die Regel an ſolche, viſirt in dieſer Richtung, zuerſt einen, jenſeits c d einzuſteckenden Stab, und wieder einen 2ten, zugleich in der graden Linie von c d ſtehenden Stab ein; und mißt einen derjenigen Winkel, welchen der Schenkel des 1ſten und 2ten Stabes mit c d machen; nach ſolchen wird nun die Mittagslinie an die Linie c d, der Zeichnung, angetragen.

Die Aufnahme durch einen gewöhnlichen Meßtiſch, und nach der gewöhnlichen Methode, weicht von der hier gezeigten, bloß darin ab: „daß man ſtets jeden Winkelpunct, durch die Zange ſenkrecht über den gleichnamichten Stationspunct bringen, und die Regel aus freyer Hand von Punct zu Punct richten muß;“ wie ſolches beym Meſſen der Winkel gelehrt iſt. Uebrigens viſirt man ſich rückwärts ein, oder braucht die Boußole ꝛc.; alles ganz ſo wie vorhin. Mehrere Genauigkeit und Schnelligkeit, gewährt aber die erſtere Methode des Operirens durch den erſten Meßtiſch, wo keine Puncte abgelothet ꝛc. zu werden brauchen.

Fig. 19. Einen Fluß aufzunehmen.

Man nehme ſich ſo nahe als möglich, Standlinien an demſelben, laſſe von ſolchen Ordinaten,

an die kleinern Krümmungen, abmeſſen; die größern und Hauptkrümmungen aber, lege man durch Durchſchnitspuncte feſt, und wenn der Fluß von beträchtlicher und ſehr ungleicher Breite iſt, ſo muß derſelbe von beyden Ufern aufgenommen, im Gegentheile aber die Hauptkrümmen des jenſeitigen Ufers, wie bey ABCD, durch Durchſchnittspuncte beſtimmt werden.

§. 202.

b. Aufnahme durch den Meßtiſch, bloß als Winkelmeſſer betrachtet.

Hierüber braucht, nach dem bereits vorausgeſchickten, nur wenig geſagt zu werden. Man reißt ſich nemlich einige große Kreiſe, je größer je beſſer, aus dem Mittelpuncte, und nimmt bloß alle Winkel der Figuren, durchs Ziehen einer Linie in der Richtung der Schenkel, zwiſchen, oder auf jenen gezogenen Kreiſen, auf; die Schenkel werden genau mit denſelben Buchſtaben, und nach derſelben Lage, wie die Stationslinien, oder Schenkellinien, bezeichnet ſind, und liegen, bezeichnet; dann durch die Sehnentafeln gemeſſen, und an ihre Stellen auf den ebenfalls mit allen Ordinaten gehörig gemeſſenen, und nach einem verjüngten Maßſtabe abzutragenden Linien, aufgetragen. Fig. 18, zeigt die ganze Aufnahme und Verzeichnung der Winkel. Man ſtellt

den Centralfuß z. B. in a, viſirt nach d, und zieht an der Regel die Linie da zwiſchen den Kreiſen, ſo nach b, und zieht ab; nun geht man nach b, viſirt ab rückwärts ein, und dreht dann die Regel nach c, und zieht bc, u. ſ. f., ſo erhält man alle Winkel der ganzen Figur, an einem einzigen, dem Mittelpuncte. Man nennt dieſes die Winkelaufnahme durch die Scheibe, weil das Tiſchblatt, worauf die Kreislinien gezogen werden, gewöhnlich rund genommen wird — ein gewiſſer Zollmann, ſoll dieſe Art der Aufnahme, zuerſt in Gang gebracht haben. Gewöhnlich ſchieben die Geometer obige Winkel durch Dreyeck und Linial ab; dieſes iſt eine unzuverläſſige Methode; will man ja dieſelben ohne Maß abtragen, ſo iſt folgende zuverläſſiger. Das Papier mit den Kreiſen, hat doch in der Mitte, wegen des Stifts, um welchen ſich die Regel dreht, einen Ausſchnitt erhalten; um den Mittelpunct wieder zu erhalten, kleiſtre man mit einem möglichſt ſchmalen Rande, ein Stück Papier über dieſes Loch, ſo kann das Centrum durch 2, ſich möglichſt nahe rechtwinklicht kreuzende Linien, hergeſtellt werden; dieſe werden mit Tuſch, oder rother Dinte, zur Unterſcheidung ausgezogen. Um das Centrum zeichnet man nun einen, $\frac{1}{4}$ Zoll Durchmeſſer, haltenden Kreis, und ſchneidet dieſes Papierſtück aus, bringt die Papierſcheibe mit dieſem kleinen Ausſchnitte über den Punct, an welchem ein Winkel derſelben abgetragen werden ſoll, und dreht, z. B. über a der Linie ab, welche vorher verjüngt gezogen wird, das Papier

ſo lange, bis auch der Schenkel der Scheibe a b genau in der Linie a b einweißt, und das Centrum der Scheibe, welches das Augenmaß durch Hülfe der rothen Kreutzlinien ſehr genau ſchätzen kann, zugleich über den Punct a liegt. In dieſer unverrückt zu erhaltenden Lage der Scheibe, lege man ein gutes Linial an den Scheiben-Schenkel a d, und ziehe aufs Papier, wo möglich vor- und rückwärts der Scheibe, eine kleine Linie, zur Marke; halte das Linial feſt in ſeiner Richtung, und ziehe die Papierſcheibe behutſam darunter hervor, ſo kann man nun da ſehr ſcharf aufziehen. Deckt zuweilen die Papierſcheibe die Linie, an welcher ein Winkel aufgetragen werden ſoll, ganz, ſo ſchneide man ein Loch von gen gender Größe, auf dem Papier-Scheiben-Schenkel ein, daß jene Linie durchſcheint; und ſo wie hier im Ganzen verfahren iſt, ſo verfährt man in jedem Puncte. Es wird einleuchten, daß man auf dem Papiere bey dieſem Abtragen, ganz daſſelbe thut, und ſo operirt, als wie man die Winkel im Felde aufnahm; denn hier trug man den Meßtiſch von Punct zu Punct fort, dort trägt man die Papierſcheibe auf dem Papiere von Punct zu Punct, und richtet die Schenkel, wie im Felde ein; die practiſchen Handgriffe finden ſich leicht. Statt zur Auffindung des Centrums, Papier aufzukleiſtern, ziehe ich mir zarte grünſeidene Kreutzfäden, welche ſolchen beſtimmen.

2. Aufnahme der innern Eintheilung ꝛc. einer Figur mit der Aufnahme des Umfangs derſelben, verbunden.

§. 203.

A. Durch Kette und Stäbe.

Fig. 20. Eine Ackerlage, abcd, mit geraden Furchen und einzelnen innern Abtheilungen, aufzunehmen, und ſogleich im Felde zu berechnen, ohne ſolche vorher aufzutragen.

Man errichte in a und b, auf die Furche ab Perpendikel bis e und f; und meſſe auf ſolchen., mit zuſammengeſchlagenen Maßen, die Breiten jeder Abtheilung; das iſt, wie viel a 1, a 2, a 3, a 4, ae betrage, ſo wie zu gleicher Zeit rechtwinklicht von den Perpendikeln aus den Puncten 1, 2, 3, e, f, die Breite, bis an die Endfurchen, ac und bd, und ſchreibe ſich ſolches auf einen Entwurf welchen man ſich aus freyer Hand, vor dem Anfange der Vermeſſung aufgezeichnet hat. Ferner meſſe man die Länge von ab, welche durch die Perpendikel, gleich ef, seyn wird. Nun wird die Berechnung ſehr leicht, und mit Zuverläſſigkeit, ebenfalls durch zuſammengeſchlagene Maßen und Stücke, auf folgende Art vorgenommen.

Zuerſt werden die beyden Dreyecke, cea und

dfb berechnet, und der Inhalt eines jeden beſon⸗ders aufgeſchrieben; dann das Paralleltrapez abef, und auch dieſes beſonders notirt; darauf aber dieſe 3 Stücke zuſammen addirt, ſo ergiebt ſich der Inhalt des Ganzen, abcd. Nun berechne man die Dreyecke, a34 und b34, ſubtrahire das erſte von dem Inhalte des △eca, und das letzte vom △dfb, ſo bleibt das Trapezoid 3ec4, und 3fd4 übrig; hierauf ferner das Paralleltrapez, ab33; und ſubtrahire ſolches von dem Inhalte des abef, ſo bleibt der Inhalt von 33ef übrig; dieſes letzte und die gefundenen 2 Trapezoiden zu einander addirt, erhält man den erſten Theil c4, d4. Dann werden die Dreyecke, a, 2, 5, und b, 2, f, berechnet, und von △cea und △dfb wie vorhin abgezogen, ſo bleibt das Trapezoid 2, 5, e, c, und 2, 5, f, d, übrig; ferner wird a2, b2, berechnet, und von abef, abgezogen, ſo bleibt ef22 übrig; dieſer jetzt nun aufs neue gefundenen 2 Dreyecke und Paralleltrapez Inhalt, zuſammen addirt, ergiebt den Inhalt von c5, d5; davon das erſte Stück c4d4 abgezogen, bleibt der Inhalt des 2ten Stücks, übrig. So ſchlägt man ferner 3 Stücke zuſammen, und berechnet erſt c6, d6; ſubtrahirt von dem gefundenen Inhalte, den Inhalt von c5, d5, ſo bleibt der Inhalt des 3ten Stücks übrig; die Summe der 3 Stücke, oder c6, d6, nun von dem Ganzen abcd abgezogen, läßt des 4ten Stücks Inhalt, ohne weitere Rechnung übrig.

Dieſe Berechnungsmethode, iſt viel zuverläſſiger

als die, wenn man jedes Stücks Inhalt, einzeln ausrechnet, man wird durch die letztere, wenn alle berechneten Stücke addirt werden, ſtets entweder zu viel oder zu wenig, gegen die berechnete Inhalts-Summe des Ganzen, herausbringen. — In der Folge, werde ich dieſe vorzüglichere Berechnung, ſtets vorausſetzen.

Fig 21. Eine Ackerlage mit geradlinichten, aber gezogenen Furchen auszumeſſen und zu berechnen, ohne ſolche aufzutragen.

Man errichte über der einen Furche a b, in b einen Perpendikel, und fälle einen dergleichen von c auf a b; ferner einen den Zugſtein x, treffenden Perpendikel e f, und ſtecke ſich in der Richtung von f y einen Stab in g; meſſe dann a e, e g und g b, mit zuſammen geſchlagenen Maßen; ferner die 3 Perpendikel mit Bemerkung der Breiten, der durch ſolche ziehenden Stücke, und zu gleicher Zeit, wie Fig. 20, die Stücke 1, 4, 1, 4; und 2, 3, 2, 3, noch aber hier auch, x y, i y; und berechne alles übrigens, ganz nach der vorhin gelehrten Methode, durchs Zuſammenſchlagen der Stücke. Die Aufnahme und Berechnung der 22 und 23ſten Figur, erläutert ſich theils ſchon aus der Zeichnung, theils aus dem im Ganzen ſchon Mitgetheilten, vollkommen. Einiges Nachdenken, wird nach dieſen ſich gänzlich zu eigen gemachten Vorkenntniſſen, nun nicht leicht mehr einen vorkommenden Fall als ſchwer aufzulöſen, finden laſſen. Nur dieſes bemerke ich

noch, daß ſtets von der halben Ackerfurche, zu der halben Ackerfurche, gemeſſen werden muß.

§. 204.

B. Durch den Meßtiſch.

Fig. 24. Eine Ackerlage aufzunehmen und zu zeichnen.

Man ſtelle den Meßtiſch in die Puncte A. B. C. D., wo die Zuglinien (wie man ſolche nennt) Bb, Cc, ſich ändern. In A nehme man den ∟ a AB auf, laſſe BA, und Aa, und auf letzterer alle Durchſchnittspuncte der Furchen, genau meſſen, und trage ſolches, wie bekannt iſt, gehörig ab. Dann wird der Tiſch in B geſtellt, und rückwärts nach A einviſirt; der ∟ ABC und ∟ bBC aufgenommen, CB und Bb, und auf letzterer wieder die Durchſchnitte der Furchen, markirt und gemeſſen; und dieſes ebenfalls aufgetragen; u. ſ. w. in C und D. Zuletzt ziehe man abcd, und die Ackerlage iſt aufgenommen und gezeichnet. Berechnet wird ſolche nach der bekannten Methode, und zwar NB, nach den, mit der Kette gemeſſenen Maßen, welche in gehöriger Ordnung aufgeſchrieben ſeyn müſſen.

Fig. 25. Eine gerade Allee durch einen Wald abzuſtecken, wenn ſolche die Ausſicht von A nach B herſtellen ſoll.

Aus A oder B, laſſe man (wenn der Wald zu

breit iſt, um ſolchen mit wenigem Zeitverluſte um- gänglich von A nach B aufnehmen zu können) in gutachtlicher Richtung gegen den andern Punct, eine Linie aufsgeradewohl in den Wald hinein, abſte- cken, z. B. von B nach a; ferner die Linie a b, wo man nur immer am beſten durchſehn kann, ohne ſich (nach Gutachten) zu ſehr von der Richtung nach je- nem Puncte A zu entfernen. Nehme den Winkel a B e, oder a B f, ferner ∟ b a B auf, laſſe B a und a b meſſen, und trage alles gehörig auf dem Meß- tiſche auf. Ferner läßt man c, und wenn der Wald länger iſt, noch mehrere Linien abſtecken, bis man durch den Wald kömmt und nach A viſiren kann; nimmt alle Winkel und Linien auf, und trägt ſolche ab. Nun zieht man in der Zeichnung, die Linie A B, ſtellt den Meßtiſch in A, viſirt ſolchen nach c ein, legt die Regel an A B, und läßt in dieſer Vi- ſirlinie ſo viele Stämme umwerfen, als erfordert wird, um 2 Stäbe x und y in ziemlicher Entfer- nung von einander, in dieſe Linie einſtellen zu kön- nen. Nach dieſen Stäben wird nun A B, indem man erforderlichen Falls, nach ſolchen wieder mehrere Stäbe nach B zu, ausſteckt, durchgehauen; dann wird es leicht ſeyn, durch an A B, rechtwinklicht, in mehrern Puncten rechts und links abgeſteckte halbe Allee = Breite, die Allee gänzlich aufhauen zu laſſen

Fig 26 und 27. zeigen, wie man einen ganzen Hofraum mit Gärten, oder ein großes Stück Feld, durch anzunehmende, hier mit Krei-

ſen ⊙ bezeichnete Verbindungslinien, richtig aufnehmen könne.

Ich muß die vollkommene Erläuterung hier zurücklaſſen, um nicht die Grenzen des Zwecks dieſes Buchs zu überſchreiten. Der nachdenkende Anfänger, wird ſchon dieſe Winke benutzen können.

III. Abſchnitt.

1. Einige Anwendungen der vorgetragenen Lehren, auf Berichtigungs-Fälle, in Unordnung gerathener Ackerſtücke ꝛc.

§. 205.

1ſter Fall. Fig. 28. Der Beſitzer des Stücks B, beklagt ſich, daß ihm von A und C Land abgepflügt worden ſey. Der Grund dieſer Klage ſoll geometriſch unterſucht, und jedem Intereſſenten ſein Ackermaß, welches für A, 400 Ruthen, für B und C jeden aber 280 Ruthen; das Ganze alſo 960 Ruthen beträgt, zugemeſſen werden.

Aufloͤſung.

Zuerſt wird der Inhalt aller 3 Theile zuſammengenommen und jedes einzeln herausgemeſſen, um zu ſehn,

1. Ob auch, (welches ſelten in unvermeſſenen Fluren der Fall iſt) das Ganze 6 Acker enthalte, und
2. Wie viel jeder Intereſſent beſitze, und darnach befriedigt werden müſſe.

Man findet den Totalgehalt um 72 Ruthen zu klein, A hat 4 R zu viel, B aber 60 R, und C 16 R zu wenig. Jeder Intereſſent muß nun nach Recht, einen Theil des Defects der 72 Ruthen, und zwar nach Verhältniß der Größe ſeines Stücks, tragen. A verliert alſo, wenn man berechnet, 888° verloren 72°, wie viel müſſen 400°, und 280°, 2mal genommen, verlieren; weil er ſchon 4° zuviel hatte, 30 + 4 = 34°; B erhält hingegen, weil ihm ſchon 60° fehlten, noch 39°, und C verliert noch zu den fehlenden 16 R°, 5 R. Zuerſt wird nun des A Antheil berichtigt, indem man mit der Länge c d e, in 34° Verluſt, dividirt, und dadurch die Höhe eines Parallelogramms dieſes Inhalts erhält. Dieſe Höhe trage man ſenkrecht unterwärts auf c d e, und ſetze nach der Richtung der dadurch erhaltenen neuen Grenzlinien, wie die Zeichnung ergiebt, die neuen Grenzſteine in p q r. Nun wird A und B bekannter Inhalt = 404 + 220 zuſammen geſchlagen, giebt 624°, und muß nach Berechnung des Verluſtes für A und B, wenn B mit befriedigt ſeyn ſoll, 629° enthalten; alſo ſind noch 5 Ruthen über f g h abzuſchneiden, welches durch Auffetzung der geſuchten Höhe eines Parallelogramms ſolchen

Inhalts, und durch darauf möglich gewordene und erfolgte Setzung der Steine in ſ, t, u, geſchieht. Das Zuſammenſchlagen der Stücke, iſt auch hier ſehr nothwendig, ſonſt bekömmt der letzte gewöhnlich zu viel oder zu wenig.

Die bereits im theoretiſchen Theile der Geometrie, pag. 311 — pag. 373. mitgetheilten Lehren, ſetze ich bey dem practiſchen Vermeſſungsgeſchäfte überhaupt, alſo auch die hier für dieſen Fall zu beſitzenden Vorkenntniſſe von pag. 356., voraus, und beziehe mich zur Erſparung des Raums, nur jetzt, ein für allemal, auf ſolche.

2ter Fall. Fig. 29. Einer Bogenartig in ungleichen Breiten gepflügten Ackerlage, wieder gerade Furchen zu geben.

Aufloſung.

Man nehme die ganze Figur auf, und berechne ſolche, wie gelehrt worden iſt; ziehe dann a b, meſſe ſolche, und dividire mit dem erhaltenen Maß, in den Inhalt von a b c d. Den erhaltenen Quotienten, ſetze man ſenkrecht auf a b, willkürlich, nach 1 und 1., und laſſe beyde Perpendikel ſogleich bis x und y verlängert, ausſtecken, desgleichen auch Perpendikel auf a und b, nach p und q errichten. Nach der Linie 1, 1, werden dann in den Endfurchen Steine geſetzt. Nun ſchlägt man den Inhalt der 2 erſten Stücke zuſammen, und dividirt wiederum mit a b; den erhalteneu Quotienten ſetzt

man ebenfalls auf αx und βy ab; und ſetzt nun nach der Linie 2, 2, die Steine wie vorhin. Nun wird der Inhalt des Ganzen mit a b dividirt, und der Quotient wie vorhin aufgetragen, — nach 3 und 3; der Inhalt des △ g p e, um welches der letzte Theil zu groß werden würde, da ſolcher außerhalb a p liegt, wird herunterwärts von 3, 3, wieder abgeſchnitten.

3ter Fall. { Fig. 30. Mit Beybehaltung krummer Furchen und der Endpunkte d, i, c, k, die Intereſſenten A und B, von welchen jeder ſeinen Nachbar durch eine Bauchung viel Land weggenommen hat, wieder in ihre Grenzen zu weiſen.

Auflöſung.

Die Aufnahme und Ausrechnung des Inhalts (beydes ohne vorher aufzutragen) iſt wie vorhin auch jetzt, das Erſte. Dann theile man die Krümme d c, in 3, oder 4 ꝛc. gleiche Theile, bis jedes Stück für eine gerade Linie paſſiren kann — hier, in 3 Theile, welche in e und f bemerkt werden. Nun muß berückſichtiget werden, daß wenn von der Krümme d e f c, herunterwärts mit Beybehaltung der Puncte d und c z. B. 60 Ruthen abgeſchnitten werden ſoll, das abzuſchneidende Stück bey d und c, ſpitz auslaufen, in der Mitte breiter ſeyn, und ſich das Abſchneiden — nach Anleitung der

Zeichnung — auf die Art bequem vornehmen laſſen müſſe, daß man bey den gleichen Stücken, de = ef = fc, gleiche Dreyecke an den Seiten, und zwiſchen ſolchen, ein gleich hohes Parallelogramm über ef, abſchneide. Dabey wäre aber zu berückſichtigen,

a. Daß — nach §. 157., Zuſatz — dieſe Dreyecke zuſammen genommen gleich, dem Parallelogramme ſind.

b. Daß ſolche Dreyecke jederzeit alſo auch hier, nur für ein ſolches Parallelogramm gerechnet, folglich im vorliegenden Falle 30°, als die eine Hälfte von 60°, durch das letzte, und 30° als die andere Hälfte von 60°, von den 2 Dreyecken (von jedem alſo 15°) abgeſchnitten werden können.

Anmerk. Bey 5 Parallelogrammen, und wenn 124 Ruthen abzuſchneiden wären, rechnete man alſo 6 Pargr. und dividirte mit 6 in 126; ſo würden 21° durch jedes Pargr., und $\frac{21°}{2} = 10° 5'$, durch jedes der 2 Seiten-Dreyecke, abzuſchneiden ſeyn.

Um 15 Ruthen aber abzuſchneiden, dividirt man mit de = fc, in 15 Ruthen, duplirt (nach pag. 356, Zeile 7 von unten) den Quotienten und ſetzt ſolchen auf de und fc, aus e und f, ſenkrecht herabwärts nach g und h. Es wird efgh, nun allerdings am Gehalt um etwas kleiner, als die bey-

den Dreyecke, ausfallen; allein für die Ausübung ganz unbedeutend. Eben auf dieſelbe Art verfährt man bey der Berichtigung des Stücks B ꝛc.

2. Einiges über das Zeichnen, Illuminiren und Copiren geometriſcher Riſſe.

§. 206.

Materialien zum Zeichnen,

ſind gutes Papier, Bleyfedern, und Tuſche, nebſt harten Federkielen. Das engliſche Velin-Papier iſt das vorzüglichſte; nächſt dieſem das ächte holländiſche Zeichenpapier. Die ächt engl. Bleyſtifte, ſind zwar auch die beſten, allein faſt gar nicht zu bekommen; doch findet man auch andere brauchbare Bleyſtifte, welche überdies ungleich wohlfeiler ſind. Die Güte des Bleyſtifts beſteht darinn, „daß der„ſelbe eine ſehr zarte, reine, nicht punctirt aus„ſehende Linie zieht, und in das Papier nicht ein„ſchneidet.“ Zum Linien ziehen wird ſolcher ſchlank breit, zum Zeichnen aber koniſch ſpitz geſchnitten.

Das Papier wird am reinlichſten mit gutem Stärke-Kleiſter aufgezogen. Das in der erforderlichen Größe geſchnittene Stück Papier, wird auf einen reinen Tiſch, auf die linke Seite gelegt, und auf der nun obenliegenden rechten, überall, ſanft mit einem, in reinem Waſſer vorher eingeweichten

Schwamme, nach allen Seiten möglichſt gleichmäſ
ßig überſtrichen: dadurch werden Runzeln und Buk-
keln e tſtehen, und das Papier ſich ausdehnen. Glaubt man, daß es ſich genug ausgedehnt habe — welches nach 1—2 Minuten geſchehen ſeyn wird — ſo ſtreicht man nach einer, vor dem Beſ
näſſen des Papiers, nach ſeinem Umfange auf dem Meßtiſche gezeichneten Randlinie, 1—2 Strohhalm breit, rundum Kleiſter auf; und legt das Papier möglichſt ausgeſtreckt, mit ſeinem Rande auf den Kleiſter; zieht ſolches dann nach allen Orten an, und ſtreicht den Rand rund um, (auswärts den Strich gerichtet) mit einem Falzbeine an, bis der Kleiſter genugſam gefaßt hat, und ſich keine Stelle mehr löſet; worauf das Brett in eine wo möglichſt wagrechte Lage und an keinen heißen Ort geſtellt wird. Zum Ausziehn der Linien und zum Zeichnen überhaupt, nimmt man eine ſchwärzlichte Farbe, den ſogenannten chineſiſchen Tuſch. Die beſte Probe der Güte deſſelben, iſt die, wenn man die Hand benetzt, und ſolchen ſanft darauf ſtreicht; hier muß er eine feine, etwas ins bräunlichte fallende Schwärze, leicht, und ohne Körner ꝛc. zurücklaſſen; ferner dürfen mit ſolchem gezogene und trocken gewordene Linien, ſich nicht auflöſen, wenn dieſelben mit einem Waſſerpinſel überfahren werden. Für 12—16—20 gl. kann man ſchon ein gutes Stück Tuſch bekommen.

Die Bleylinien einer Figur, werden mit möglichſter Schärfe, durch etwas ſtark (doch nicht zu ſtark) angeriebene Tuſche, in zarten ſcharfen Linien,

bis an die kleinen, um die Winkelpuncte gezogenen, Grenzſteine vorſtellenden Kreiſe, aber nicht durch dieſelben ausgezogen, der Punct muß frey bleiben. — Eckichte Grenzſteine, markiren die Winkelpuncte ſehr ſchlecht. Wie die Gegenſtände, welche in, oder neben, einem geometriſchen Grundriſſe vorkommen, — als Bäume, Flüſſe ꝛc — gezeichnet werden müſſen, darüber kann ich hier keine weitere Anleitung geben, als was ohngefähr die IIte. und IIIte Tafel, beyläufig enthalten; Chriſtoph Gottfried Rau, Anweiſung zur Situations Zeichnung, (Friedrichſtadt, gedruckt bey Gerlach), ertheilt einen ſo vollſtändigen als deutlichen Unterricht darüber. — Um nur etwas zu berühren, Folgendes — Alle Umriſſe von Bäumen, Flüſſen ꝛc. werden mit einer zart geſpitzten harten Feder, und mit, um etwas weniges ſchwärzerer Tuſche als die Linien, gezeichnet. Baumholz, wird mit Kronen, welche einen Stamm erhalten, junger Nachwuchs aber und Buſchholz, mit denſelben Kronen ohne einen Stamm daran zu ſetzen, gezeichnet. Die Furchen der Ländereyen, werden nach ihrem Laufe gezeichnet. In dem, von Burgsdorfiſchen Forſt-Handbuche Iſten Theil, und der vortrefflichen Anleitung zum planimetriſchen Vermeſſen der Feldmarken, von Hogrewe, findet man Muſter zu Forſt- und Flurcharten-Zeichnungen. Ueber Bergzeichnungen glaube ich in der Kürze noch etwas Nützliches ſagen zu können. Berge, und jede Erhöhung über der Erde von Bedeutung, als gro-

ſe Hügel, Bergrücken; ja ſelbſt Vertiefungen, als Gräben ꝛc. werden von dem Anfänger am leichte- ſten durch Striche mit der Feder, welche die Form eines langen lateiniſchen ſ haben (das kurze Ende oder Biegung oben, und die längere unten) und mit gut abgeriebenener etwas ſtärkern Tuſche, als die Umriſſe der Bäume ꝛc., mit fein geſchnittenen guten Schreibfedern gezogen, dargeſtellt werden kön- nen; man nennt dieſe Art der Darſtellung, das Bergſchraffiren. Bey Bergzeichnungen iſt die Hauptſache, daß die Linien ſämmtlich, oben auf dem Berge in einen Punct zuſammen zulaufen, oder aus ſolchem gezogen zu ſeyn ſcheinen. Die Bergrücken- ſtriche, laufen alle parallel, bis an die Abrundung an den Enden, wo ſolche ebenfalls wieder um einen, auf der Endkuppe im Mittel angenommenen Punct, herumliegend, ſchraffirt werden. Schatten und Licht fallen bey Bergzeichnungen weg; da man das Steile, und Lähne, das Abnehmen und Zunehmen der Berge, bloß durch ſtärkere oder ſchwächere Linien, ausdrücken kann. Je ſteiler der Berg anwächſt, je ſtärker und enger werden die Striche; und um- gekehrt, weitläuftiger und ſchwächer. Die Länge der Striche iſt nicht für willkührlich anzunehmen; ſie müſſen, wo möglich, das Maß der reducirten Horizontal-Linie haben; wozu uns die nöthigen Bemerkungen, beym Auftragen der Figuren, darge- boten werden. — Wenige Bergzeichnungen halten aber eine ſolche Probe aus.

Zum Illuminiren,

kann man ſich entweder, die jetzt ſo wohlfeilen

und wirklich größtentheils ſehr gute Farbenſtücke ent- haltende Farbekäſtchen — ich empfehle in dieſer Rück- ſicht, Herrn Kaufmann Hildt in Gotha — oder noch wohlfeiler und ſchon genügend, folgende Farben, welche in jeder Apotheke zu haben ſind, kaufen, und bereiten. Hauptfarben ſind

1. Grün. Dieſe wird uns, als grüne Dinte bereitet, am nützlichſten werden. Man nehme 2 Loth gepülverten deſtillirten oder nur guten undeſtillirten Grünſpan, 1 Quent. Curcu- me, ½ Loth arabiſches Gummi, und laſſe ſol- ches einige Wochen in der Sonne, mit einem Nöſel Weineſſig in einer gläſernen Flaſche überſchüttet, oder auch nur auf dem Ofen, gut deſtilliren, kläre ſolches dann ab, und verwah- re es, wie alle Farben, gut gegen den Staub.

2. Gelb. Unter dem Namen Gummi Gutte, erhält man in Stücken, ſehr gute, und leicht mit Waſſer aufzulöſende gelbe Farbe; doch muß ſolche auf dem Bruche glänzend ſeyn, ins roth- gelbe ſpielen, und ſich ohne Körner ꝛc. auflö- ſen. — Für 2 Groſchen kann man mit der erhal- tenen Farbe einige Jahre auskommen. Es wird nie mehr Farbe angerieben, oder noch beſſer mit dem Pinſel ſanft abgenommen, als man braucht. —

3. Roth. Die ſchönſte dieſer Farbe giebt der Carmin; er muß aber trocken, noch als Pul- ver, nicht ins Violette ſpielen. Abgerieben

und verdünnt in ein Schälchen gethan, darf ſolcher ſich nicht ſo ſtark ſetzen, daß das Waſſer ſeine ſchöne rothe Farbe verliert, ſonſt iſt er unächt. Mit weißem Gummiwaſſer, oder beſſer einem Paar Tropfen Citronen⸗Saft, wird ſolches vor dem Gebrauche, abgerieben und dann verdünnt.

4. Blaue. Gutes Berliner⸗Blau, wird in einem Mörſer ſehr klar geſtoßen, dann mit feinem Zucker oder Gummi⸗Waſſer abgerieben, und das gefärbte Waſſer, behutſam abgenommen. Aus dieſen 4 Farben, und der Tuſche, laſſen ſich alle übrigen Mittel⸗Farben hervorbringen. Man nimmt z. B. einen Pinſel voll Tuſch, desgleichen Carmin und Gummi Gutte, ſo entſteht eine braune Farbe, welche man, nachdem man viel oder wenig, von dieſem oder jenem nimmt, dunkler, heller ꝛc. machen kann. Etwas Gummi Gutte unter die grüne Dinte, giebt ein ſchönes Grün zum Anlegen von Wieſen. Carmin mit Berliner⸗Blau, giebt Purpur⸗Farbe; Carmin mit Gummi Gutte, aber Orange ꝛc. Verſuche ſind hier die beſte Lehrerin. Die beſten Illuminir⸗Pinſel, ſind die Engliſchen und Strasburger, zunächſt die ächten Münchner; man wähle die Mittelgröße, und zwar ſolche Pinſel, welche durch den Mund gezogen, ſich ſehr gut ohne kulpicht zu ſeyn, zuſpitzen. Um Riſſe ſchön illuminiren zu können, muß man vorzüglich mit der Lehre von Licht und Schatten bekannt ſeyn; auch gehört zum guten Zeichnen geometriſcher Riſſe,

Handzeichenkunſt — ich empfehle in dieſer Rückſicht, das „zu Hof bey Grau, erſchienene Neue theoret. pract. Zeichenbuch, zum Selbſtunterrichte für alle Stände — das Iſte — IIIte Heft deſſelben, wird faſt für Jeden in dieſer Lehre genugſamen Unterricht enthalten; vielleicht ſchon das IIIte Heft allein. Im Allgemeinen auch nur etwas über das Illuminiren mitzutheilen, Folgendes. Alle Schatten lege man zuerſt mit ſehr ſchwacher Läutertuſche an; und überſetze ſolche ſo oft, bis ſie ſtark genug ſind. Dann werden alle übrigen Farben, beſonders die grüne, möglichſt ſchwach aufgetragen, und zwar die Wieſen grün, die Flüſſe und das Gewäſſer überhaupt blau; die Wieſen erhalten verlorne, zarte kleine Horizontal-Strichelchen von Tuſch, mit 1—2 darauf geſetzten kleinen Puncten. Die Schatten Uferlinie der Flüſſe und des Gewäſſers, wird mit dunkelblauer Farbe, doch zart ausgezogen. Die Fahrwege werden lichtbraun angelegt; die Ackerfelder und Gartenland aber dunkler braun — Waſſerſümpfe, braun mit blauen Horizontal Strichelchen. Man ſtecket ſtets 2 Pinſel an einen Stock; der eine faßt die Farbe, der andere iſt bloß ſehr feucht von reinem Waſſer, um damit verwaſchen zu können (wie man es nennt.) Mit etwas alter Semmel läßt ſich von den Zeichnungen aller Schmutz, durchs Reiben, wieder herunter bringen. Das bekannte elaſtiſche Federharz, welches in der Regel auch in den Apotheken zu haben iſt, dient zum Auslöſchen der Bleylinien und bedeutenderer Schmutzſtellen.

Das Copiren oder Abzeichnen geometriſcher Riſſe, können Anfänger am kürzeſten und richtigſten, auf folgende Art vornehmen: Der abzuzeichnende Riß, wird auf das zum Zeichnen beſtimmte Papier, vollkommen ausgebreitet aufgelegt, und gegen das Verrücken, hin und wieder mit etwas Gewicht beſchwert. Dann werden alle Puncte der geraden Linien, ſo wie die Hauptkrümmungen zugleich mit, in einer guten Ordnung nach und nach ſenkrecht durchgeſtochen. Zum Durchſtechen nimmt man eine feine engliſche Nähnadel, und giebt ſolcher ein Knöpfchen von Siegellack. Dann werden alle abgeſtochenen Puncte mit der nöthigen Vorſicht, und durch Unterſtützung des Zirkels, gehörig zuſammengezogen; die Löcher in dem Original-Riſſe aber, mit einem Falzbeine, auf der linken Seite wieder zugeſtrichen. Sehr gut und richtig kann man aber auch durch Benutzung des 3 ſpitzigen Stangenzirkels copiren; indem man ſtets 3 Puncte faßt, und ſolche abſetzt; dieſes Verfahren bedarf aber keiner weitern Erläuterung.

Das Verjüngen der Riſſe,

geſchieht am ſchnellſten durch den Verjüngungszirkel, wenn deſſen Einrichtung, für das beſtimmte Maß der Verjüngung, ſonſt paßt; und ſolcher nicht zu kurze Schenkel hat. Es beruht die Verjüngung der Riſſe auf dem 6ten Lehrſatze §. 161, und Zuſatz 2, deſſelben §.; iſt alſo der Verjüngungszirkel z. B. ſo geſtellt, daß ſich die kleinere Linie zu der größern, wie 1 : 2 verhält; ſo wird man, die Maßen

mit den großen Schenkeln abgenommen, und mit den kleinen Schenkeln abgetragen, eine Figur erhalten, welche ſich zu der erſten, wie $1^2:2^2=1:4$ verhält, folglich 4 mal kleiner ſeyn. Wenn die kleinere Linie zur größern ſich aber wie 3:9 verhielte, ſo würde die, bey ſolcher Stellung der Schenkel verjüngt gezeichnete Figur, ſich zu dem Original wie 9:81 = 1:9 verhalten, alſo 9 mal kleiner ſeyn; u. ſ. w. Man verjüngt auch durch Netze, welche entweder mit Bleyſtift gezogen, oder von zarten Fäden genau verfertigt, aufgelegt werden; doch würde mich deſſen Mittheilung zu weit führen, da Anfänger überdieß ſelten in die Lage kommen, Riſſe verjüngt zeichnen zu müſſen.

Ende.

Anhang.

Einfache Reductions-Tafel
für
gemeſſene ſchräge und ſteile Berglinien, zur Beſtimmung, der ſolchen zugehörigen Horizontalen, und des Gefälles derſelben.

Ehe der Gebrauch dieſer Tafel ſelbſt gezeigt wird, ſoll hier noch einiges über die Aufnahme des Neigungswinkels und des dazu erforderlichen kleinen Apparats, geſagt werden. Das rechtwinklichte Dreyeck, bietet uns durch ſeine Seiten und Winkel das nützlichſte Bild und Hülfsmittel bey Meſſungen in abhängenden-, beſonders bergichten und prallichten Gegenden, dar. Die Hypothenuſe, kann die abhängende Seite des Berges, welche man mißt; die Grundlinie aber, den Fuß des Berges horizontal ſtehend-, und der 2te Cathetus oder Perpendikel, von dem Endpunkte der Hypothenuſe, auf den Endpunct der Grundlinie, uns eine lothrecht durch den Berg von dem Endpuncte der gemeſſenen ſchrägen Linie bis auf den Boden oder Fuß des Berges, gezogene Linie vorſtellen; und dadurch, (ſo wie man aus 3 gegebenen Stücken eines Dreyecks die übrigen finden

kann) die Grundlinie, und Höhe der Berge gefunden werden. Da in geometriſch: planimetriſchen Zeichnungen, bloß Grundriſſe, alſo bloß der Umfang der Berge, nicht aber ihre Höhe, verzeichnet werden kann; ſo muß man Mittel kennen, die krummen oder ſchrägen Linien der Berge und Abhänge, auf ihre horizontale Größe, d. i., zu dieſer ſchrägen Linie als Hypotheuuſe, die dazu gehörige Grundlinie, die Baſis derſelben, zu finden; kann man aber dieſe finden, ſo iſts eben ſo leicht, auch die dazu gehörige Höhe zu beſtimmen. Der Winkel, welchen die Hypothenuſe mit der Horizontallinie bildet, heißt der Neigungswinkel, und zwar dann der Elevationswinkel, wenn man bergauf mißt; hingegen Depreſſionswinkel, wenn man bergab mißt.

Zum Meſſen der Neigungswinkel, kann man die bekannte Kippregel mit einem Gradbogen, auf welchem nur $\frac{1}{4}$tel Grade, durch einen aus dem Centro hängenden Pendel genau abgeſchnitten werden können, ſehr gut gebrauchen. Da man, wie jedem Geometer von ſelbſt einleuchten wird, Station zu Station von gleichen Höhen viſiren und meſſen muß; ſo muß die Abſichtstafel mit ihrer Mitte, von einer 10 Zoll von der Spitze des Fußes ihrer Stange angebrachten runden Scheibe, (um ſtets gleich tief im Boden zu ſtecken) genau ſo hoch entfernt ſeyn, als die Inſtruments-Höhe, das heißt NB., die Höhe, von der, (bey horizontaler Stellung des Inſtruments) horizontalen Viſirlinie der Regel, bis auf die, am Centralſtabe, wie an der Abſichtstafel, ange-

brachte runde Scheibe beträgt. Der Centralſtab, geht aus dem Centro des Stativs aus, und erſpart zugleich das Ablothen des Winkelpunctes. Das 1 Fuß — 1 F. 3 — 6 Zoll □ große Bretchen, welches an einem Stabe hängend, die Abſichtstafel bildet; muß ſenkrecht und wagrecht, alſo ſich kreuzend, in 4 gleiche Felder getheilt, dergeſtalt angeſtrichen ſeyn, daß ein ſchwarzes, oder noch beſſer, ein rothes Feld und ein weißes Feld, übereinander zu ſtehen kommen, um mit dem, in dem Objectiv-Diopter befindlichen Querhaare; oder beym Fernrohre, mit der, in dem Plan-Glaſe eingeätzten + Querlinie, dieſe mittlere Querlinie der Tafel, ſcharf ab viſiren zu können. Bey der Aufnahme des Neigungswinkels, muß das Inſtrument zuvor richtig horizontal geſtellt werden. Iſt dieſer Winkel abviſirt, ſo hat man zugleich den Stations-Winkel (wenn das Inſtrument vorher gehörig eingerichtet worden war) miterhalten; und man mißt nun vom Inſtrumentspuncte, bis zum Abſichtstafelpuncte, die ſchräge Linie, qua Hypothenuſe; und ſo geht man, von Station zu Station, mit Abſichtstafel und Inſtrument fort; wodurch ſich dann die ſämmtlichen nöthigen Data, zum Beſtimmen aller horizontalen Grundlinien, Statt der gemeſſenen ſchrägen Linien, ergeben. Da in einem jeden Dreyecke, eine mit der Grundlinie zwiſchen den Schenkeln deſſelben parallel gezogene gerade

Linie, ſtets wieder ein ähnliches Dreyeck bildet, in welchem die Seiten (alſo auch die Hypothenuſe) zwar kleiner, aber dennoch alle proportional ſind; ſo kann man auch, wenn das Verhältniß der Hypothenuſe und Catheten des einen ähnlichen rechtwinklichten Dreyecks bekannt iſt, auch durch Proportionsrechnung die Größe der Catheten, in dem andern ähnlichen rechtwinklichten Dreyecke, wenn nur deſſen Hypothenuſe bekannt iſt, finden. Hierauf ſtützt ſich der Gebrauch der Reductions-Tafel. Um die Rechnung bequem zu machen, habe ich die Horizontallinie und den Perpendikel oder das Gefälle eines Punctes, für Hypothenuſen von 10 Ruthen, berechnet; wollte man nun z. B. die reducirte Horizontale zu einer Hypothenuſe, d. i. gemeſſenen ſchrägen Abhangslinie, von 36 Ruthen, 3 Fuß, 5 Zoll, bey einem Neigungswinkel von $12\frac{1}{2}$ Grad, ſo wie das Gefälle dieſer Linie, kennen; ſo ſuche man den Neigungswinkel von $12\frac{1}{2}°$ in der Tafel auf, und ſehe was darneben in der zweyten Columne für die Horizontale, und in der 3ten für das Gefälle, auf 10 Ruthen ſchräger Linie berechnet, ſteht. Man wird zwar nur 6.2, und 6.4, finden; und ſollte 976.2, und 216.4 ſtehn; allein zur Erſparung der Zahlen, ſind durchgehends, nur bey den ganzen Graden, die vollen Zahlen geſetzt worden; und müſſen die Ruthen und Füße hier, als 97, und 21, von den oberhalb ſtehenden Zahlen der 3ten Zahlſtelle (von der rechten zur Linken) herunter ge-

holt und hinzugefügt werden. Nun ſchließt und frägt man, wie bekannt iſt, „eine Hypothen.: von „10 Ruthen hat eine Horizontale (Gefälle) von 9° 7′ 6″. 2‴ (2° 1′ 6″ 4‴); eine wie große Horizontale (Gefälle) muß eine ſchräge Linie von 36° 3′ 5″, haben.

Alſo, 10. | 9° 7′ 6″ 2‴
* | 3 6° 3′ 5″ 0‴

```
   48 8 1 0 0
  292 8 6 . .
 5857 2 . . .
29286 . . . .
-------------
35484|8 7 0 0
```

Mit 10 Ruthen dividirt, ergiebt ſich, 3° 5′ 4″ 8‴; denn da die Reductionszahlen der Tafel ſämmtlich bis auf Linien gehn, ſo mußten auch hier, den 10 Ruthen noch 3 Nullen angehängt werden, um ſolche in Linien zu verwandeln; mit 10000 aber dividirt, werden bekanntlich 4 Zahlen von der rechten zur linken abgeſchnitten; und kann es daher bey dieſen Berechnungen gleich zur Regel werden, daß

„man bloß die Reductionszahlen der Tafel des gemeſſenen Grades, mit der gemeſſenen ſchrägen Linie zu multipliciren, und vom Producte 4 Zahlen abzuſchneiden brauche.“

Als z. B. bey Berechnung des Gefälles,

zu obiger Horizontale, 2164‴

2164‴ 36350‴ 108200 6492 12984 6492 7866|1400	ſogleich 7°8′8″6‴ Gefälle.

Wie groß iſt die Horizontale, wenn man bey 10¼ Grad Elevationswinkel, 6 Ruthen 3 Fuß Hypothenuſe, oder ſchräge Linie, gefunden hat? Neben 10¼ Grad der Tafel ſteht bloß eine Null, allein zu ſolcher gehören die darüber ſtehende Zahlen 984; alſo findet man, 98 4.0, dieſe multip. mit obigen 6°3″.

6 3.00 295 2.000 5904 6199|2,000	giebt 6°1′9″9‴ Horizontal.

und 17 7.9 6.300 53 3.7 1067 4 1120|7700	giebt die Höhe von 1°1′2″0‴. Die Puncte in der Tafel, ſollen bloß den Abſchnitt der Zolle von den Linien, andeuten, wenn man etwa bloß auf Zolle

gehen wollte; ich rathe aber, wenigſtens beym Berechnen, die Linien beyzubehalten; die Erſparniß der kleinen Mühe, mit einer Zahl mehr zu multipliciren, iſt unbedeutend.

Beym Darſtellen der Berge durchs Schraffiren und Tuſchen, wird die Kenntniß der Höhe der

Berge, wegen der anzudeutenden Abdachungen, und auch, „was doch billig bey jeder Charte mit eingezeichnet werden ſollte, nemlich die Profilriſſe, von wenigſtens 2en Hauptlagen, äußerſt nützlich, und alſo dem topographiſchen Geometer, ganz unentbehrlich. Daß man beym Aufnehmen mit dem Meßtiſche, dieſe Berechnungen nach der Reductionstafel, ſogleich an Ort und Stelle, um darnach die verjüngte Linie abtragen zu können, vornehmen müſſe, hat allerdings, beſonders bey weitläuftigen Detailmeſſungen in prallichten Gegenden, einige Beſchwerden, doch kann man ſich auch Tafeln berechnen, welche jede Horizontale ſchon berechnet, enthalten, und iſt größtentheils zureichend, wenn ſolche ſelbſt nur bis zum 12ten Grade gehn. Tafeln der Art, habe ich ſchon ſeit vielen Jahren ausgearbeitet, und werde dergleichen noch dieſes Jahr drucken laſſen.

Allein, ſelbſt ſchon bey jenen Berechnungen, gewinnt man durch den kleinen Zeitaufwand ſo ungeheuer an Genauigkeit, ja, man kann nur auf dieſem Wege, nemlich durch Reduction, richtige Arbeiten liefern, ſo, daß dieſer kleine Zeitaufwand, als ein ausgeliehenes Zeitcapital, welches mehr als 10000 pro Cent Intereſſe, abwirft, angeſehen werden kann; denn ſchließen, nur leidlich ſchließen, kann und wird niemals eine Figur, wenn die Horizontale nicht gehörig aufgetragen worden iſt; und ſolche durch die bekannte Staffelmeſſung zu finden, wie ungeheuer mühſam und Zeit-

zerſplitternd! — denn an das Meſſen mit abgekürzter Kette, wird wohl kein Geometer, „dem Pflicht, Ehre und Liebe für ſein Geſchäft, nicht vermeynte Hirngeſpinnſte ſind, welche nach ſeiner Würdigung nicht bezahlt werden, wohl nicht denken.“

Reductions = Tafel
der ſchrägen Linien auf Horizont

Bey dem Neig. Wink.	10 Ruth. ſchräge Linie, giebt eine Horiz. von	Gefälle von	Bey dem Neig. Wink.	10 Ruth. ſchräge Linie giebt eine Horiz. von	Gefälle von	Bey dem Neig. Wink.	10 ſchräg… eine Hor… von
¼	9°9′9″.9‴	4.3	¼	986.9	160.7	¼	949.6
½		8.7	½	.2	5.0	½	8.3
¾		13.0	¾	5.5	9.3	¾	6.9
1	9 9 9 .8	17.4	10	984.8	173.6	19	945.5
¼	.7	21.8	¼	.0	7.9	¼	4.0
½	.6	6.1	½	3.2	82.2	½	2.6
¾	.5	30.5	¾	2.9	6.5	¾	1.1
2	9 9 9 .3	34.8	11	981.6	190.8	20	939.6
¼	.2	9.2	¼	0.7	5.0	¼	8.1
½	.0	43.6	½	79.9	9.3	½	6.6
¾	8.8	8.0	¾	.0	203.6	¾	5.1
3	9 9 8 .6	52.3	12	978.1	207.9	21	933.5
¼	.3	6.6	¼	7.2	12.1	¼	2.0
½	.1	61.0	½	6.2	6.4	½	0.4
¾	7 .8	5.4	¾	5.3	20.6	¾	28.8
4	9 9 7 .5	69.7	13	974.3	224.9	22	927.1
¼	.2	74.1	¼	3.3	9.2	¼	5.5
½	6 .9	8.4	½	2.3	33.4	½	3.8
¾	.5	82.8	¾	1.3	7.6	¾	2.2
5	9 9 6 .1	87.1	14	970.2	241.9	23	920.5
¼	5 .8	91.5	¼	69.2	6.1	¼	18.7
½	.3	5.8	½	8.1	50.3	½	7.0
¾	4 .9	100.1	¾	7.0	4.6	¾	5.3
6	9 9 4 .5	104.5	15	965.9	258.8	24	913.5
¼	.0	8.8	¼	4.7	63.0	¼	1.7
½	3 .5	13.2	½	3.6	7.2	½	09.9
¾	.0	7.5	¾	2.4	71.4	¾	8.1
7	9 9 2 .5	121.8	16	961.2	275.6	25	906.3
¼	.0	6.1	¼	0.0	9.8	¼	4.4
½	1 .4	30.5	½	58.8	84.0	½	2.5
¾	0 .8	4.8	¾	7.5	8.1	¾	0.6
8	9 9 0 .2	139.1	17	956.3	292.3	26	898.7
¼	8 9 .6	43.4	¼	5.0	6.5	¼	6.8
½	.0	7.8	½	3.7	300.7	½	4.9
¾	8 .3	52.1	¾	2.3	4.8	¾	2.9
9	9 8 7 .6	156.4	18	951.0	309.0	27	891.0

Anleitung

des

Gebrauchs nachſtehender Sehnen-Tafeln.

Aus der Geometrie iſt bekannt, daß man Winkel durch Sehnen meſſen kann. Für die Sehnen der Winkel von $\frac{1}{2}$ Grad bis 90 Grad ſind nun gegenwärtige Tafeln berechnet — ſie enthalten alſo die Maßen, für alle, zwiſchen $\frac{1}{2}$ — 90 Grad liegende Winkel.

Bey der Berechnung liegt der Halbmeſſer von $40^{0}0'0''0'''$ und der Sin. Tot. der Vegaiſchen Tafeln = 10,000,0000, zum Grunde.

Soll die Meſſung der Winkel, den bey ſchon einigen beträchtlichen öconomiſchen Vermeſſungen erforderlichen Grad der Genauigkeit ergeben, ſo müſſen die Schenkel ſo lang als möglich genommen wer-

den; je länger dieſe, je ſchärſer wird das Maß der Winkel beſtimmt.

Unter 6 Pariſer Zoll Länge, würde ich den Halbmeſſer niemals nehmen; auch hier faßt ſolchen der verjüngte oder tauſendtheilichte Maßſtab in halber wahrer Größe gezeichnet, in 40 Ruthen. Man zeichne ſich daher den Maßſtab Fig. 1. in doppelter Größe; — am beſten auf ein ſolches Bret, welches oben und unten mit Maſerreinen Aepfel- oder Birnbaumholze fournirt iſt; in der Mitte, zwiſchen den Fourniren, muß altes Fichten- oder Tannen-Blindholz, von wenigſtens ¾ Zoll Stärke, befindlich ſeyn, welches aus 3—4 Stücken, mit umgelegten Jahren gegeneinander geleimt, beſteht. Die Fourniere beſtehen ebenfalls wohl aus 5—6 Stücken, ſo geleimt, von ¼ Zoll Stärke. — Die Horizontal-Parallelen, 1. 2 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. ſchneiden, auf den Transverſalen, wie auf andern Maßſtäben, die einzelnen Fuße ab. Die zwiſchen ihnen gezogenen 9 Parallelen, als zwiſchen 0 und 1, 1 und 2 ꝛc. ſchneiden auf denſelben alſo die Zolle ab; wo jederzeit die 5te Zoll-Linie durch Puncte markirt iſt, um deſto bequemer die einzelnen Zolle abzählen zu können. Die obigen Fußlinien 1. 2. 3 ꝛc. unterſcheidend gezogen, diſtinguiren ſich ſehr nützlich, und erleichtern das Abnehmen der Maßen außerordentlich. Die Zolllinien ziehe man mit der Zirkelſpitze, und fahre über ſolche mit engliſchem Bleyſtifte ganz zart her, daß ſolche bloß etwas geſchwärzt erſcheinen.

Fig. 2.

Zeigt ein Schema, wie Winkel durch die Sehnen gemeſſen werden müſſen.

Um ſelbſt mit dem gewöhnlichen Handzirkel bequem manipuliren zu können, ſo nehme man keine Sehne länger als 31 Ruthen und 9 Fuß, höchſtens 36 Ruthen und 9 Fuß, welche erſtere zu dem Winkel von 47 Graden gehört; aber auch keine Sehne kürzer als 5 Ruthen; es nehmen ſich in beyden Fällen die Maßen nicht ſcharf genug ab.

Um aber auf dieſe Art Winkel meſſen zu können, muß man folgendergeſtalt verfahren:

1. Winkel über 47 Grad zu meſſen und abzutragen.

Um, z. B. den Winkel BAD zu meſſen, ſo trage man aus dem Winkelpuncte A, durch einen Bogen auf beyde Schenkel, AB und AD, den Halbmeſſer, für welchen die Sehnentafeln berechnet ſind, nemlich 40 Ruthen; und ziehe die dadurch erhaltenen Puncte zuſammen, daß iſt, die Sehne aD. Dann nehme man 31 Ruthen 9 Fuß — als das Maß für 47 Grade, zwiſchen die Zirkelſpitze, und reiße an D, den Kreutzbogen bd.

Iſt nun aG kleiner als 5 Ruthen, ſo kann man noch bequem die Sehne Da faſſen, und ſolche auf

dem Maßſtabe meſſen, das gefundene Maß ſchlägt man in den Sehnen-Tafeln auf, und ſo ſteht neben ſolchen, der dazu gehörende Winkel. Für dieſen Fall iſt a G kleiner als 5 Ruthen; es kann alſo a D noch bequem zwiſchen den Zirkel genommen werden. Mißt man nun ſolches, ſo findet man 35 Ruthen, 5 Fuß, 4 Zoll; dieſes in den Tafeln aufgeſucht, hat den Winkel von 52 Grad 45 Min. u. 2 Sec. zur Seite; welches das Maß für ∟ BAD iſt.

Wäre a G aber größer als 5 Ruthen, ſo faſſt man a G zwiſchen den Zirkel, und meſſe ſolches; das gefundene Maß ſuche man in den Tafeln auf, und addire den darneben ſtehenden Winkel zu 47 Grad, als dem zur Sehne G D gehörigen Winkel G A D; denn der ∟ x + ∟ y = ∟ BAC. —

2. Einen Winkel unter 47 Grad zu meſſen.

Winkel, welche noch eine Sehne über 5 Ruthen Länge haben, werden durch bloße Meſſung der ihnen zugehörigen Sehne und das Aufſchlagen des gefundenen Maßes in den Tafeln, neben welchem die Grade, Minuten und Secunden ſtehn, beſtimmt.

Winkel unter 5 Ruthen, kann man bequem auf folgende Art meſſen:

Den Winkel y zu beſtimmen, reiße man mit dem Halbmeſſer von 40 Ruthen, aus dem Winkelpuncte A mit A G, den Bogen a G D, und ſchneide mit 31 Ruthen, 9 Fuß, aus G, den Punct D, auf ſolchen ab; ſo iſt ∟ x = 47 Gr. Nun meſſe man wie vorhin die Sehne a D, ſuche deren Winkel auf, und ſubtrahire von ſolchem, welcher = ∟ x + ∟ y, den ∟ x; ſo bleibt der zu findende geſuchte kleinere ∟ y, übrig.

Es hält aber ∟ x 47 Grad und ∟ x + ∟ y = 52 Gr. 45 Min. 2 Sec.

also 52. 45. 2
47
Reſt = 5. 45. 2 = ∟ y.

Auf dieſe Art läßt ſich auch der kleinſte Winkel meſſen; ſelbſt der kleine Winkel D A E, welcher nicht mehr als ½ Grad mißt. Man mißt nemlich die Sehne des Winkels E A G, welcher aus dem ∟ D A E, und ∟ G A E beſteht, ſucht das Maß derſelben in den Tafeln und den darneben ſtehenden Winkeln auf, und ſubtrahirt von ſolchem 47 Grad, als den ∟ G A D oder ∟ x, ſo erhält man den ∟ D A E. Der ∟ G A E war 47 Grad 30 Min. 4 Sec.

alſo 47°. 30′. 4″.
— 47 ′ ″
Reſt = 30. 4. für ∟ D A E.

3. Stumpfe Winkel zu meſſen.

Man miß't ſein Supplement, das heißt den ihn zu 2 R. ergänzenden ſpitzen Nebenwinkel, wie vorhin gelehrt worden iſt; und ſubtrahirt deſſen Maß, von 180 Grad. Der Reſt iſt der geſuchte ſtumpfe Winkel.

4. Winkel abzutragen.

Dieſes iſt nach der Kenntniß des Vorhergehenden ſehr leicht. Es ſollte z. E. an A. Fig. 2, ein Winkel von 5 Gr. 43 Min. 54 Sec. geſetzt werden, ſo reiße man mit 40 Ruth. Radius oder Halbmeſſer, den Bogen a G; ſchlage in den Tafeln den zu zeichnenden Winkel auf, ſo ſteht zur Seite die Sehne deſſelben, mit welcher man aus G den Bogen G a durchſchneidet; der Durchſchnittpunkt ergiebt die Lage des 2ten Schenkels, — man zieht nemlich A B. Bey einem ſtumpfen Winkel zeichnet man natürlich ſtets ſein Supplement. —

Fig. 3.

Zeigt das Blatt einer Zollmanniſchen Scheibe, auf welchem die Winkel der 2ten Figur aufgenommen und gezeichnet ſtehn. — Man ſieht aus den punktirten Sehnen, daß man ſolche, wenn die Kreislinie x x x x mit 40 Ruthen Radius gezogen iſt, ſogleich auf dieſer Platte die Sehnen aller Winkel ohne bey

jedem den Radius aufs neue abſetzen zu müſſen, meſſen kann.

Fig. 4.

Zeigt eine aufgetragene oder mit dem Meßtiſche aufgenommene Figur; wie deren Umfangswinkel durch Sehnen gemeſſen werden müſſen — welches die punktirten Linien deutlich ergeben.

Winkel abzutragen.

Dieſes iſt nach der Kenntniſs des Vorhergehenden ſehr leicht. Es ſollte z. B. an A. Fig. 2. ein Winkel von 5 Gr. 43 Min. 54 Se. geſetzt werden, ſo reiſſe man mit 40 Ruth. Radius oder Halbmeſſer, den Bogen a O; ſchlage in den Tafeln den zu zeichnenden Winkel auf, ſo ſteht zur Seite die Sehne [illegible], mit welcher man aus O den Bogen a A durchſchneidet; der Durchſchnittspunkt ergiebt die Lage des [illegible] Schenkels, — man ziehe nämlich A [illegible]. Bey einem ſtumpfen Winkel gebraucht man natürlich ſtets ſein Supplement. —

Fig. 3.

Zeigt das Blatt einer [illegible] Scheibe, auf welchem die Winkel der [illegible] Figur aufgenommen und gezeichnet ſtehn. — Man ſieht aus den punktirten Sehnen, daſs man ſolche, wenn die Kreislinie x x x x mit 40 Ruthen Radius gezogen iſt, ſogleich auf dieſer Scheibe die Sehnen aller Winkel ohne den

Sehnen-
oder
Winkelmeſſer-Tafeln.

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S.	R.	F.	Z.	Gr	M.	S.
	3	5		30	4		7	2	1	1	52
		6		30	56			3		2	44
		7		31	46			4		3	34
		8		32	38			5		4	26
		9		33	30			6		5	18
	4	—		34	11			7		6	10
		1		35	14			8		7	2
		2		36	4			9		7	52
		3		36	58		8	—	1	8	44
		4		37	48			1		9	36
		5		38	40			2		10	28
		6		39	32			3		11	20
		7		40	22			4		12	10
		8		41	14			5		13	2
		9		42	6			6		13	54
	5	—		42	58			7		14	46
		1		43	48			8		15	36
		2		44	40			9		16	28
		3		45	32		9	—	1	17	20
		4		46	24			1		18	12
		5		47	16			2		19	4
		6		48	6			3		19	54
		7		48	58			4		20	46
		8		49	50			5		21	38
		9		50	42			6		22	30
	6	—		51	34			7		23	22
		1		52	24			8		24	12
		2		53	16			9		25	4
		3		54	8	1	—	—	1	25	56
		4		55	—			1		26	48
		5		55	50			2		27	38
		6		56	42			3		28	30
		7		57	34			4		29	22
		8		58	26			5		30	14
		9		59	18			6		31	6
	7	—	1	—	—			7		31	58
		1		1	—			8		32	48

Läng: d. Seh. R.	F.	Z.	Gr d. Wink. Gr	M	S.
1		9		33	40
	1	—	1	34	32
		1		35	24
		2		36	14
		3		37	6
		4		37	58
		5		38	50
		6		39	40
		7		40	32
		8		41	24
		9		42	16
	2	—	1	43	8
		1		43	58
		2		44	50
		3		45	42
		4		46	34
		5		47	24
		6		48	16
		7		49	8
		8		50	—
		9		50	52
	3	—	1	51	42
		1		52	34
		2		53	26
		3		54	18
		4		55	10
		5		56	2
		6		56	52
		7		57	44
		8		58	36
		9		59	28
	4	—	2	—	18
		1		1	10
		2		2	2
		3		2	54
		4		3	46
		5		4	36

Länge d. Seh. R.	F.	Z.	Gr d. Wink. Gr	M	S.
1	4	6		5	28
		7		6	20
		8		7	12
		9		8	2
	5	—	2	8	54
		1		9	46
		2		10	36
		3		11	28
		4		12	20
		5		13	12
		6		14	4
		7		14	56
		8		15	48
		9		16	38
	6	—	2	17	30
		1		18	22
		2		19	14
		3		20	4
		4		20	56
		5		21	48
		6		22	40
		7		23	30
		8		24	22
		9		25	14
	7	—	2	26	6
		1		26	58
		2		27	50
		3		28	40
		4		29	32
		5		30	24
		6		31	16
		7		32	6
		8		32	58
		9		33	50
	8	—	2	34	42
		1		35	32
		2		36	24

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
1	8	3	2	37	16	2	2	—	3	9	6
		4		38	8			1		9	56
		5		39	—			2		10	48
		6		39	52			3		11	40
		7		40	42			4		12	32
		8		41	34			5		13	22
		9		42	26			6		14	14
	9	—	2	43	18			7		15	6
		1		44	10			8		15	58
		2		45	—			9		16	50
		3		45	52		3	—		17	40
		4		46	44			1		18	32
		5		47	36			2		19	24
		6		48	28			3		20	16
		7		49	18			4		21	8
		8		50	10			5		21	58
		9		51	2			6		22	50
2	—	—	2	51	54			7		23	42
		1		52	44			8		24	34
		2		53	36			9		25	26
		3		54	28		4	—	3	26	16
		4		55	20			1		27	8
		5		56	12			2		28	—
		6		57	2			3		28	52
		7		57	54			4		29	44
		8		58	46			5		30	34
		9		59	38			6		31	26
	1	—	3	—	30			7		32	18
		1		1	20			8		33	0
		2		2	12			9		34	2
		3		3	4		5	—	3	34	52
		4		3	56			1		35	44
		5		4	48			2		36	36
		6		5	38			3		37	28
		7		6	30			4		38	20
		8		7	22			5		39	10
		9	—	8	14			6		40	2

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
2	5	7	3	40	54	2	9	4	4	12	42
		8		41	46			5		13	34
		9		42	36			6		14	26
	6	—	3	43	28			7		15	18
		1		44	20			8		16	10
		2		45	12			9		17	—
		3		46	4	3	—	—	4	17	52
		4		46	54			1		18	44
		5		47	46			2		19	36
		6		48	38			3		20	28
		7		49	30			4		21	18
		8		50	22			5		22	10
		9		51	12			6		23	2
	7	—	3	52	4			7		23	54
		1		52	56			8		24	46
		2		53	48			9		25	36
		3		54	40		1	—	4	26	28
		4		55	30			1		27	20
		5		56	22			2		28	12
		6		57	14			3		29	4
		7		58	6			4		29	54
		8		58	58			5		30	46
		9		59	50			6		31	38
	8	—	4	—	40			7		32	30
		1		1	32			8		33	22
		2		2	24			9		34	12
		3		3	16		2	—	4	35	4
		4		4	6			1		35	56
		5		4	58			2		36	48
		6		5	50			3		37	40
		7		6	42			4		38	12
		8		7	34			5		39	22
		9		8	24			6		40	14
	9	—	4	9	16			7		41	6
		1		10	8			8		41	58
		2		11	—			9		42	50
		3		11	52		3	—	4	43	40

Länge d. Sek.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
3	3	1	4	44	32	3	6	8	5	16	22
		2		45	24			9		17	14
		3		46	16		7	—	5	18	6
		4		47	8			1		18	56
		5		47	58			2		19	48
		6		48	50			3		20	40
		7		49	42			4		21	32
		8		50	34			5		22	24
		9		51	26			6		23	14
	4	—	4	52	18			7		24	6
		1		53	8			8		24	58
		2		54	—			9		25	50
		3		54	52		8	—	5	26	42
		4		55	44			1		27	32
		5		56	36			2		28	24
		6		57	26			3		29	16
		7		58	18			4		30	8
		8		59	10			5		31	—
		9	5	—	2			6		31	52
	5	—		—	54			7		32	42
		1		1	44			8		33	34
		2		2	36			9		34	26
		3		3	28		9	—	5	35	18
		4		4	20			1		36	10
		5		5	12			2		37	2
		6		6	2			3		37	52
		7		6	54			4		38	44
		8		7	46			5		39	36
		9		8	38			6		40	28
	6	—	5	9	30			7		41	20
		1		10	20			8		42	10
		2		11	12			9		43	2
		3		12	4	4	—	—	5	43	54
		4		12	56			1		44	46
		5		13	48			2		45	38
		6		14	38			3		46	28
		7		15	30			4		47	20

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	Gr	M	S.	N	F.	Z.	Gr	M	S.
4		5	5	48	12	4	4	2	6	20	4
		6		49	4			3		20	54
		7		49	56			4		21	46
		8		50	48			5		22	38
		9		51	38			6		23	30
	1	—	5	52	30			7		24	22
		1		53	22			8		25	14
		2		54	14			9		26	4
		3		55	6		5	—	6	26	56
		4		55	56			1		27	48
		5		56	48			2		28	40
		6		57	40			3		29	32
		7		58	32			4		30	24
		8		59	24			5		31	14
		9	6	—	16			6		32	6
	2	—		1	6			7		32	58
		1		1	58			8		33	50
		2		2	50			9		34	42
		3		3	42		6	—	6	35	34
		4		4	34			1		36	24
		5		5	24			2		37	16
		6		6	16			3		38	8
		7		7	8			4		39	—
		8		8	—			5		39	52
		9		8	52			6		40	44
	3	—	6	9	44			7		41	34
		1		10	34			8		42	26
		2		11	26			9		43	18
		3		12	18		7	—	6	44	10
		4		13	10			1		45	2
		5		14	25			2		45	54
		6		14	54			3		46	44
		7		15	44			4		47	36
		8		16	36			5		48	28
		9		17	28			6		49	20
	4	—	6	18	20			7		50	12
		1		19	12			8		51	4

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
4	7	9	6	51	54	5	1	6	7	23	46
	8	—	6	52	46			7		24	38
		1		53	38			8		25	30
		2		54	28			9		26	20
		3		55	20		2	—	7	27	12
		4		56	12			1		28	4
		5		57	4			2		28	56
		6		57	56			3		29	48
		7		58	48			4		30	40
		8		59	38			5		31	30
		9	7	—	30			6		32	22
	9	—		1	22			7		33	14
		1		2	14			8		34	6
		2		3	6			9		34	58
		3		3	58		3	—	7	35	50
		4		4	48			1		36	40
		5		5	40			2		37	32
		6		6	32			3		38	24
		7		7	24			4		39	16
		8		8	16			5		40	8
		9		9	8			6		41	—
5	—	—	7	9	58			7		41	50
		1		10	50			8		42	42
		2		11	42			9		43	34
		3		12	34		4	—	7	44	26
		4		13	46			1		45	18
		5		14	18			2		46	10
		6		15	10			3		47	—
		7		16	—			4		47	52
		8		16	52			5		48	44
		9		17	44			6		49	36
	1	—	7	18	36			7		50	28
		1		19	28			8		51	20
		2		20	18			9		52	12
		3		21	12		5	—	7	53	2
		4		22	4			1		53	54
		5		22	56			2		54	46

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	Gr	M	S.	N.	F.	Z.	Gr	M	S.
5	5	3	7	55	38	5	9	—	8	27	30
		4		56	30			1		28	22
		5		57	22			2		29	14
		6		58	12			3		30	6
		7		59	4			4		30	58
		8		59	56			5		31	50
		9	8	—	48			6		32	40
	6	—		1	40			7		33	32
		1		2	32			8		34	24
		2		3	24			9		35	16
		3		4	14	6	—	—	8	36	8
		4		5	6			1		37	—
		5		5	58			2		37	52
		6		6	50			3		38	42
		7		7	42			4		39	34
		8		8	34			5		40	26
		9		9	24			6		41	16
	7	—	8	10	16			7		42	10
		1		11	8			8		43	2
		2		12	—			9		43	54
		3		12	52		1	—	8	44	44
		4		13	44			1		45	36
		5		14	36			2		46	28
		6		15	26			3		47	20
		7		16	18			4		48	12
		8		17	10			5		49	4
		9		18	2			6		49	56
	8	—	8	18	54			7		50	46
		1		19	46			8		51	38
		2		20	36			9		52	30
		3		21	28		2	—	8	53	22
		4		22	20			1		54	14
		5		23	12			2		55	6
		6		24	4			3		55	58
		7		24	56			4		56	50
		8		25	48			5		57	40
		9		26	40			6		58	32

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.
6	2	7	8	59	24
		8	9	—	16
		9		1	8
	3	—		2	—
		1		2	52
		2		3	42
		3		4	34
		4		5	26
		5		6	18
		6		7	10
		7		8	2
		8		8	54
		9		9	44
	4	—	9	10	36
		1		11	28
		2		12	20
		3		13	12
		4		14	4
		5		14	56
		6		15	48
		7		16	38
		8		17	30
		9		18	22
	5	—	9	19	14
		1		20	6
		2		20	58
		3		21	50
		4		22	40
		5		23	32
		6		24	24
		7		25	16
		8		26	8
		9		27	—
	6	—	9	27	52
		1		28	44
		2		29	34
		3		30	26
6	6	4	9	31	18
		5		32	10
		6		33	2
		7		33	54
		8		34	46
		9		35	38
	7	—	9	36	28
		1		37	20
		2		38	12
		3		39	4
		4		39	56
		5		40	48
		6		41	40
		7		42	32
		8		43	22
		9		44	14
	8	—	9	45	6
		1		45	58
		2		46	50
		3		47	42
		4		48	34
		5		49	26
		6		50	16
		7		51	8
		8		52	—
		9		52	52
	9	—		53	44
		1		54	36
		2		55	28
		3		56	20
		4		57	12
		5		58	2
		6		58	54
		7	10	59	46
		8	10	—	38
		9		1	30
7	—	—		2	22

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
7	—	1	10	3	14	7	3	8	10	35	10
		2		4	6			9		36	—
		3		4	56		4	—	10	36	52
		4		5	48			1		37	44
		5		6	40			2		38	36
		6		7	32			3		39	28
		7		8	24			4		40	20
		8		9	16			5		41	12
		9		10	8			6		42	4
	1	—	10	11	—			7		42	56
		1		11	52			8		43	48
		2		12	42			9		44	38
		3		13	14		5	—	10	45	30
		4		14	26			1		46	22
		5		15	18			2		47	14
		6		16	10			3		48	6
		7		17	2			4		48	58
		8		17	54			5		49	50
		9		18	46			6		50	42
	2	—	10	19	18			7		51	34
		1		20	28			8		52	24
		2		21	20			9		53	16
		3		22	12		6	—	10	54	8
		4		23	4			1		55	—
		5		23	56			2		55	52
		6		24	48			3		56	44
		7		25	20			4		57	36
		8		26	32			5		58	28
		9		27	24			6		59	20
	3	—	10	28	14			7	11	—	12
		1		29	6			8		1	2
		2		29	58			9		1	54
		3		30	50		7	—		2	46
		4		31	42			1		3	38
		5		32	34			2		4	30
		6		33	46			3		5	22
		7		34	18			4		6	14

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
7	7	5	11	7	6	8	1	2	11	39	2
		6		7	58			3		39	54
		7		8	50			4		40	46
		8		9	42			5		41	38
		9		10	32			6		42	30
	8	—	11	11	24			7		43	22
		1		12	16			8		44	14
		2		13	8			9		45	6
		3		14	—		2	—	11	45	58
		4		14	52			1		46	50
		5		15	44			2		47	42
		6		16	36			3		48	34
		7		17	28			4		49	26
		8		18	20			5		50	16
		9		19	12			6		51	8
	9	—	11	20	2			7		52	—
		1		20	54			8		52	52
		2		21	46			9		53	44
		3		22	38		3	—	11	54	36
		4		23	30			1		55	28
		5		24	22			2		56	20
		6		25	14			3		57	12
		7		26	6			4		58	4
		8		26	58			5		58	56
		9		27	50			6		59	48
8	—	—	11	28	42			7	12	—	40
		1		29	32			8		1	30
		2		30	24			9		2	22
		3		31	16		4	—		3	14
		4		32	8			1		4	6
		5		33	—			2		4	58
		6		33	52			3		5	50
		7		34	44			4		6	42
		8		35	36			5		7	34
		9		36	28			6		8	26
	1	—	11	37	20			7		9	18
		1		38	12			8		10	10

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
8	4	9	12	11	2	8	8	6	12	43	—
	5	—	12	11	54			7		43	52
		1		12	46			8		44	44
		2		13	38			9		45	36
		3		14	28		9	—	12	46	28
		4		15	20			1		47	20
		5		16	12			2		48	12
		6		17	4			3		49	4
		7		18	56			4		49	56
		8		18	48			5		50	48
		9		19	40			6		51	40
	6	—	12	20	32			7		52	32
		1		21	24			8		53	24
		2		22	16			9		54	16
		3		23	8	9	—	—	12	55	8
		4		24	—			1		55	58
		5		24	52			2		56	52
		6		25	44			3		57	44
		7		26	34			4		58	34
		8		27	26			5		59	26
		9		28	18			6	13	—	18
	7	—	12	29	10			7		1	10
		1		30	2			8		2	2
		2		30	54			9		2	54
		3		31	46		1	—		3	46
		4		32	38			1		4	38
		5		33	30			2		5	30
		6		34	22			3		6	22
		7		35	14			4		7	14
		8		36	6			5		8	6
		9		36	58			6		8	58
	8	—	12	37	50			7		9	50
		1		38	42			8		10	42
		2		39	34			9		11	34
		3		40	26		2	—	13	12	26
		4		41	18			1		13	18
		5		42	8			2		14	8

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
9	2	3	13	15	—	9	6	—	13	47	2
		4		15	52			1		47	54
		5		16	44			2		48	46
		6		17	36			3		49	38
		7		18	28			4		50	30
		8		19	20			5		51	22
		9		20	12			6		52	14
	3	—	13	21	4			7		53	6
		1		21	56			8		53	58
		2		22	48			9		54	50
		3		23	40		7	—		55	42
		4		24	32			1		56	34
		5		25	24			2		57	26
		6		26	16			3		58	18
		7		27	8			4		59	10
		8		28	—			5	14	—	2
		9		28	52			6		—	54
	4	—	13	29	44			7		1	46
		1		30	36			8		2	38
		2		31	28			9		3	30
		3		32	20		8	—		4	22
		4		33	12			1		5	14
		5		34	4			2		6	6
		6		34	56			3		6	58
		7		35	48			4		7	50
		8		36	40			5		8	42
		9		37	32			6		9	34
	5	—		38	22			7		10	24
		1		39	14			8		11	16
		2		40	6			9		12	8
		3		40	58		9	—	14	13	—
		4		41	50			1		13	52
		5		42	42			2		14	44
		6		43	34			3		15	36
		7		44	26			4		16	28
		8		45	18			5		17	20
		9		46	10			6		18	12

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S	R.	F.	Z.	Gr	M.	S.
9	9	7	14	19	4	10	3	4	14	51	8
		8		19	56			5		52	—
		9		20	48			6		52	52
10	—	—	14	21	40			7		53	44
		1		22	32			8		54	36
		2		23	24			9		55	28
		3		24	16		4	—		56	20
		4		25	8			1		57	12
		5		26	—			2		58	4
		6		26	52			3		58	56
		7		27	44			4		59	48
		8		28	36			5	15	—	40
		9		29	28			6		1	32
	1	—	14	30	20			7		2	22
		1		31	12			8		3	16
		2		32	4			9		4	8
		3		32	56		5	—		5	—
		4		33	48			1		5	52
		5		34	40			2		6	44
		6		35	32			3		7	36
		7		36	24			4		8	28
		8		37	16			5		9	20
		9		38	8			6		10	12
	2	—	14	39	—			7		11	4
		1		39	52			8		11	56
		2		40	44			9		12	48
		3		41	36		6	—	15	13	40
		4		42	28			1		14	32
		5		43	20			2		15	24
		6		44	12			3		16	16
		7		45	4			4		17	8
		8		45	56			5		18	—
		9		46	48			6		18	52
	3	—	14	47	40			7		19	44
		1		48	32			8		20	36
		2		49	24			9		21	28
		3		50	16		7	—	15	22	20

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	G.	M.	S.	N.	F.	Z.	Gr.	M.	S.
10	7	1	15	23	12	11	—	8	15	55	18
		2		24	4			9		56	10
		3		24	56		1	—	15	57	2
		4		25	48			1		57	56
		5		26	40			2		58	46
		6		27	32			3		59	38
		7		28	24			4	16	—	32
		8		29	16			5		1	24
		9		30	10			6		2	16
	8	—	15	31	2			7		3	8
		1		31	54			8		4	—
		2		32	46			9		4	52
		3		33	38		2	—	16	5	44
		4		34	30			1		6	36
		5		35	22			2		7	28
		6		36	14			3		8	20
		7		37	6			4		9	12
		8		37	58			5		10	4
		9		38	50			6		10	56
	9	—	15	39	42			7		11	48
		1		40	34			8		12	40
		2		41	26			9		13	32
		3		42	18		3	—	16	14	24
		4		43	10			1		15	16
		5		44	2			2		16	8
		6		44	54			3		17	—
		7		45	46			4		17	52
		8		46	38			5		18	46
		9		47	30			6		19	38
11	—	—	15	48	22			7		20	30
		1		49	14			8		21	22
		2		50	6			9		22	14
		3		50	58		4	—	16	23	6
		4		51	50			1		23	56
		5		52	42			2		24	50
		6		53	34			3		25	42
		7		54	26			4		26	34

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
11	4	5	16	27	26	11	8	2	16	59	34
		6		28	18			3	17	—	26
		7		29	10			4		1	18
		8		30	2			5		2	10
		9		30	54			6		3	4
	5	—	16	31	46			7		3	56
		1		32	38			8		4	48
		2		33	30			9		5	40
		3		34	22		9	—	17	6	32
		4		35	14			1		7	24
		5		36	6			2		8	16
		6		37	—			3		9	8
		7		37	52			4		10	—
		8		38	44			5		10	52
		9		39	36			6		11	44
	6	—	16	40	28			7		12	36
		1		41	20			8		13	28
		2		42	12			9		14	20
		3		43	4	12	—	—	17	15	14
		4		43	56			1		16	6
		5		44	48			2		16	58
		6		45	40			3		17	50
		7		46	32			4		18	42
		8		47	24			5		19	34
		9		48	16			6		20	26
	7	—	16	49	8			7		21	18
		1		50	—			8		22	10
		2		50	52			9		23	2
		3		51	46		1	—	17	23	56
		4		52	38			1		24	48
		5		53	30			2		25	40
		6		54	22			3		26	32
		7		55	14			4		27	24
		8		56	6			5		28	16
		9		56	58			6		29	8
	8	—	16	57	50			7		30	—
		1		58	42			8		30	52

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
12	1	9	17	31	44	12	5	6	18	3	56
	2	—	17	32	36			7		4	48
		1		33	28			8		5	40
		2		34	20			9		6	32
		3		35	12		6	—	18	7	24
		4		36	4			1		8	16
		5		36	58			2		9	8
		6		37	50			3		10	—
		7		38	42			4		10	54
		8		39	34			5		11	46
		9		40	26			6		12	38
	3	—	17	41	18			7		13	30
		1		42	10			8		14	22
		2		42	42			9		15	14
		3		43	54		7	—	18	16	6
		4		44	48			1		16	58
		5		45	40			2		17	52
		6		46	32			3		18	44
		7		47	24			4		19	36
		8		48	16			5		20	28
		9		49	48			6		21	20
	4	—	17	50	—			7		22	12
		1		50	52			8		23	4
		2		51	44			9		23	56
		3		52	36		8	—	18	24	50
		4		53	30			1		25	42
		5		54	22			2		26	34
		6		55	54			3		27	26
		7		56	6			4		28	18
		8		56	58			5		29	10
		9		57	50			6		30	2
	5	—		58	42			7		30	54
		1		59	34			8		31	46
		2	18	—	26			9		32	40
		3		1	20		9	—		33	32
		4		2	10			1		34	24
		5		3	4			2		35	16

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R	F	Z	Gr	M	S	R	F	Z	Gr	M	S
12	9	3	18	36	8	13	3	—	19	8	22
		4		37	—			1		9	14
		5		37	52			2		10	6
		6		38	44			3		11	—
		7		39	38			4		11	52
		8		40	30			5		12	44
		9		41	22			6		13	36
13	—	—		42	14			7		14	28
		1		43	6			8		15	20
		2		43	58			9		16	12
		3		44	50		4	—	19	17	6
		4		45	44			1		17	58
		5		46	36			2		18	50
		6		47	28			3		19	42
		7		48	20			4		20	34
		8		49	12			5		21	26
		9		50	4			6		22	18
	1	—		50	56			7		23	12
		1		51	50			8		24	4
		2		52	42			9		24	56
		3		53	34		5	—	19	25	48
		4		54	26			1		26	40
		5		55	18			2		27	34
		6		56	10			3		28	26
		7		57	2			4		29	18
		8		57	54			5		30	10
		9		58	48			6		31	2
	2	—		59	40			7		31	54
		1	19	—	32			8		32	46
		2		1	24			9		33	40
		3		2	16		6	—	19	34	32
		4		3	8			1		35	4
		5		4	—			2		36	16
		6		4	52			3		37	8
		7		5	46			4		38	—
		8		6	38			5		38	54
		9		7	30			6		39	46

Långe d. Seh.			Gr. d. Wink.			Långe d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	G.	M.	S.	R.	F.	Z.	Gr.	M.	S.
13	6	7	19	40	38	14	—	4	20	12	54
		8		41	10			5		13	48
		9		42	22			6		14	40
	7	—	19	43	14			7		15	32
		1		44	8			8		16	24
		2		45	—			9		17	18
		3		45	52		1	—	20	18	10
		4		46	44			1		19	2
		5		47	16			2		19	54
		6		48	28			3		20	46
		7		49	22			4		21	38
		8		50	14			5		22	32
		9		51	6			6		23	24
	8	—	19	51	58			7		24	16
		1		52	50			8		25	8
		2		53	42			9		26	—
		3		54	36		2	—	20	26	54
		4		55	28			1		27	46
		5		56	20			2		28	38
		6		57	12			3		29	30
		7		58	4			4		30	22
		8		58	58			5		31	16
		9		59	50			6		32	8
	9	—	20	—	42			7		33	—
		1		1	34			8		33	52
		2		2	26			9		34	46
		3		3	8		3	—	20	35	38
		4		4	12			1		36	30
		5		5	4			2		37	22
		6		5	56			3		38	14
		7		6	48			4		39	8
		8		7	42			5		40	—
		9		8	34			6		40	52
14	—	—	20	9	26			7		41	44
		1		10	18			8		42	36
		2		11	10			9		43	30
		3		12	2		4	—	20	44	22

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
14	4	1	20	45	14	14	7	8	21	17	34
		2		46	6			9		18	26
		3		46	58		8	—	21	19	20
		4		47	52			1		20	12
		5		48	44			2		21	4
		6		49	36			3		21	58
		7		50	28			4		22	50
		8		51	22			5		23	42
		9		52	14			6		24	34
	5	—	20	53	6			7		25	26
		1		53	58			8		26	20
		2		54	50			9		27	12
		3		55	42		9	—	21	28	4
		4		56	36			1		28	56
		5		57	28			2		29	48
		6		58	20			3		30	42
		7		59	14			4		31	34
		8	21	—	6			5		32	26
		9		—	58			6		33	20
	6	—		1	50			7		34	12
		1		2	42			8		35	4
		2		3	36			9		35	56
		3		4	28	15	—	—	21	36	50
		4		5	20			1		37	42
		5		6	12			2		38	34
		6		7	6			3		39	26
		7		7	58			4		40	20
		8		8	50			5		41	12
		9		9	42			6		42	4
	7	—	21	10	34			7		42	56
		1		11	28			8		43	50
		2		12	20			9		44	42
		3		13	12		1	—	21	45	34
		4		14	4			1		46	26
		5		14	56			2		47	20
		6		15	50			3		48	12
		7		16	42			4		49	4

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
15	1	5	21	49	56	15	5	2	22	22	20
		6		50	50			3		23	14
		7		51	42			4		24	6
		8		52	34			5		24	58
		9		53	28			6		25	52
	2	—	21	54	20			7		26	44
		1		55	12			8		27	36
		2		56	4			9		28	28
		3		56	56		6	—	22	29	22
		4		57	50			1		30	14
		5		58	42			2		31	6
		6		59	34			3		32	—
		7	22	—	26			4		32	52
		8		1	20			5		33	44
		9		2	12			6		34	36
	3	—		3	24			7		35	30
		1		3	56			8		36	22
		2		4	50			9		37	14
		3		5	42		7	—	22	38	6
		4		6	34			1		39	—
		5		7	28			2		39	52
		6		8	20			3		40	44
		7		9	12			4		41	38
		8		10	4			5		42	30
		9		10	58			6		43	22
	4	—	22	11	50			7		44	14
		1		12	42			8		45	8
		2		13	36			9		46	—
		3		14	28		8	—	22	46	52
		4		15	20			1		47	46
		5		16	12			2		48	38
		6		17	6			3		49	30
		7		17	58			4		50	24
		8		18	50			5		51	16
		9		19	44			6		52	8
	5	—	22	20	36			7		53	2
		1		21	28			8		53	54

Länge d. Seh. R.	F.	Z.	Gr. d. Wink. Gr.	M.	S.	Länge d. Seh. R.	F.	Z.	Gr. d. Wink. Gr	M	S.
15	8	9	22	54	46	16	2	6	23	27	14
	9	—	22	55	40			7		28	6
		1		56	32			8		29	—
		2		57	24			9		29	52
		3		58	16		3	—	23	30	44
		4		59	10			1		31	38
		5	23	—	2			2		32	30
		6		—	54			3		33	22
		7		1	48			4		34	16
		8		2	40			5		35	8
		9		3	32			6		36	—
16	—	—		4	26			7		36	54
		1		5	18			8		37	46
		2		6	10			9		38	38
		3		7	4		4	—	23	39	32
		4		7	56			1		40	24
		5		8	48			2		41	18
		6		9	42			3		42	10
		7		10	34			4		43	2
		8		11	26			5		43	56
		9		12	18			6		44	48
	1	—	23	13	12			7		45	40
		1		14	4			8		46	32
		2		14	56			9		47	26
		3		15	50		5	—	23	48	18
		4		16	42			1		49	10
		5		17	34			2		50	4
		6		18	28			3		50	56
		7		19	20			4		51	48
		8		20	12			5		52	42
		9		21	6			6		53	36
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—			7		54	28
	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]			8		55	22
		[illegible]		[illegible]	[illegible]			9		56	14
		[illegible]		[illegible]	36	6	—	23	57	6
		[illegible]		25	28			[illegible]		57	58
		5		26	22			2		58	52

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
16	6	3	23	59	44	17	—	—	24	32	16
		4	24	—	36			1		33	8
		5		1	30			2		34	—
		6		2	22			3		34	54
		7		3	14			4		35	46
		8		4	8			5		36	38
		9		5	—			6		37	32
	7	—	24	5	54			7		38	24
		1		6	46			8		39	18
		2		7	38			9		40	10
		3		8	30		1	—	24	41	2
		4		9	24			1		41	56
		5		10	16			2		42	48
		6		11	8			3		43	42
		7		12	2			4		44	34
		8		12	54			5		45	26
		9		13	46			6		46	20
	8	—	24	14	40			7		47	12
		1		15	32			8		48	6
		2		16	24			9		48	58
		3		17	18		2	—	24	49	50
		4		18	12			1		50	44
		5		19	4			2		51	36
		6		19	58			3		52	28
		7		20	50			4		53	22
		8		21	42			5		54	14
		9		22	36			6		55	8
	9	—	24	23	28			7		56	—
		1		24	20			8		56	54
		2		25	14			9		57	46
		3		26	6		3	—	24	58	38
		4		26	58			1		59	32
		5		27	52			2	25	—	24
		6		28	44			3		1	18
		7		29	36			4		2	10
		8		30	30			5		3	4
		9		31	22			6		3	56

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
17	3	7	25	4	48	17	7	4	25	37	24
		8		5	41			5		38	18
		9		6	34			6		39	10
	4	—	25	7	28			7		40	2
		1		8	20			8		40	56
		2		9	14			9		41	50
		3		10	6		8	—	25	42	42
		4		10	58			1		43	34
		5		11	52			2		44	28
		6		12	44			3		45	20
		7		13	38			4		46	14
		8		14	30			5		47	6
		9		15	22			6		48	—
	5	—	25	16	16			7		48	52
		1		17	10			8		49	46
		2		18	14			9		50	38
		3		18	54		9	—	25	51	32
		4		19	48			1		52	24
		5		20	40			2		53	16
		6		21	34			3		54	10
		7		22	26			4		55	2
		8		23	18			5		55	56
		9		24	12			6		56	48
	6	—	25	25	4			7		57	42
		1		25	56			8		58	34
		2		26	50			9		59	28
		3		27	42	18	—	—	26	—	20
		4		28	36			1		1	12
		5		29	28			2		2	6
		6		30	22			3		2	58
		7		31	14			4		3	52
		8		32	8			5		4	44
		9		33	—			6		5	38
	7	—	25	33	54			7		6	30
		1		34	46			8		7	24
		2		35	—			9		8	16
		3		36	32		1	—	26	9	10

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
18	1	1	26	10	2	18	4	8	26	42	42
		2		10	56			9		43	36
		3		11	48		5	—	26	44	28
		4		12	42			1		45	22
		5		13	34			2		46	14
		6		14	26			3		47	8
		7		15	20			4		48	—
		8		16	14			5		48	54
		9		17	6			6		49	46
	2	—	26	17	58			7		50	40
		1		18	52			8		51	32
		2		19	44			9		52	26
		3		20	38		6	—	26	53	18
		4		21	32			1		54	12
		5		22	24			2		55	4
		6		23	18			3		55	58
		7		24	10			4		56	50
		8		25	2			5		57	44
		9		25	56			6		58	36
	3	—	26	26	48			7		59	30
		1		27	42			8		—	22
		2		28	34			9	27	1	16
		3		29	28	15	7	—		2	8
		4		30	20			1		3	2
		5		31	14			2		3	14
		6		32	6			3		4	48
		7		33	—			4		5	40
		8		33	52			5		6	34
		9		34	46			6		7	28
	4	—	26	35	38			7		8	20
		1		36	32			8		9	12
		2		37	24			9		10	6
		3		38	18		8	—	27	10	58
		4		39	10			1		11	52
		5		40	2			2		12	46
		6		40	54			3		13	38
		7		41	50			4		14	32

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
18	8	5	27	15	24	19	2	2	27	48	8
		6		16	18			3		49	2
		7		17	10			4		49	54
		8		18	4			5		50	48
		9		18	58			6		51	42
	9	—	27	19	50			7		52	34
		1		20	42			8		53	28
		2		21	36			9		54	20
		3		22	28		3	—	27	55	14
		4		23	22			1		56	6
		5		24	14			2		57	—
		6		25	8			3		57	54
		7		26	—			4		58	46
		8		26	54			5		59	40
		9		27	48			6	28	—	32
19	—	—	27	28	40			7		1	26
		1		29	34			8		2	18
		2		30	26			9		3	12
		3		31	20		4	—		4	4
		4		32	12			1		4	58
		5		33	6			2		5	52
		6		34	—			3		6	44
		7		34	52			4		7	38
		8		35	46			5		8	30
		9		36	38			6		9	24
	1	—	27	37	32			7		10	18
		1		38	24			8		11	10
		2		39	18			9		12	4
		3		40	10		5	—	28	12	56
		4		41	4			1		13	50
		5		41	58			2		14	44
		6		42	50			3		15	36
		7		43	44			4		16	30
		8		44	36			5		17	22
		9		45	30			6		18	16
	2	—	27	46	22			7		19	10
		1		47	16			8		20	2

Länge d Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
19	5	9	28	20	56	19	9	6	28	53	46
	6	—	28	21	48			7		54	36
		1		22	42			8		55	32
		2		23	34			9		56	22
		3		24	28	20	—	—	28	57	18
		4		25	22			1		58	10
		5		26	14			2		59	4
		6		27	8			3		59	58
		7		28	—			4	29	—	50
		8		28	54			5		1	46
		9		29	46			6		2	36
	7	—	28	30	40			7		3	30
		1		31	32			8		4	24
		2		32	26			9		5	16
		3		33	20		1	—		6	10
		4		34	12			1		7	4
		5		35	6			2		7	56
		6		36	—			3		8	50
		7		36	54			4		9	44
		8		37	46			5		10	36
		9		38	40			6		11	30
	8	—	28	39	32			7		12	22
		1		40	26			8		13	16
		2		41	20			9		14	10
		3		42	12		2	—	29	15	4
		4		43	4			1		15	56
		5		44	—			2		16	50
		6		44	52			3		17	44
		7		45	46			4		18	36
		8		46	38			5		19	30
		9		47	32			6		20	22
	9	—	28	48	24			7		21	16
		1		49	18			8		22	10
		2		50	12			9		23	4
		3		51	2		3	—	29	23	56
		4		52	—			1		24	50
		5		52	50			2		25	42

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
20	3	3	29	26	36	20	7	—	29	59	30
		4		27	30			1	30	—	24
		5		28	22			2		1	16
		6		29	16			3		2	10
		7		30	10			4		3	4
		8		31	2			5		3	58
		9		31	56			6		4	50
	4	—	29	32	50			7		5	44
		1		33	42			8		6	36
		2		34	36			9		7	30
		3		35	30		8	—		8	24
		4		36	22			1		9	18
		5		37	16			2		10	10
		6		38	10			3		11	4
		7		39	2			4		11	58
		8		39	56			5		12	50
		9		40	50			6		13	44
	5	—	29	41	42			7		14	38
		1		42	36			8		15	32
		2		43	30			9		16	24
		3		44	22		9	—	30	17	18
		4		45	16			1		18	12
		5		46	10			2		19	6
		6		47	2			3		19	58
		7		47	56			4		20	52
		8		48	50			5		21	46
		9		49	42			6		22	38
	6	—	29	50	36			7		23	32
		1		51	30			8		24	26
		2		52	22			9		25	18
		3		53	16	21	—	—	30	26	14
		4		54	10			1		27	6
		5		55	2			2		28	—
		6		55	58			3		28	52
		7		56	50			4		29	46
		8		57	44			5		30	40
		9		58	36			6		31	32

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
21	—	7	30	32	26	21	4	4	31	5	26
		8		33	20			5		6	18
		9		34	14			6		7	12
	1	—	30	35	6			7		8	6
		1		35	—			8		9	—
		2		36	54			9		9	54
		3		37	48		5	—	31	10	46
		4		38	40			1		11	42
		5		39	34			2		12	34
		6		40	28			3		13	28
		7		41	22			4		14	20
		8		42	14			5		15	14
		9		43	8			6		16	8
	2	—	30	44	2			7		17	2
		1		44	56			8		17	56
		2		45	50			9		18	48
		3		46	42		6	—	31	19	42
		4		47	36			1		20	36
		5		48	30			2		21	28
		6		49	24			3		22	22
		7		50	16			4		23	16
		8		51	10			5		24	10
		9		52	4			6		25	4
	3	—	30	52	56			7		25	58
		1		53	50			8		26	50
		2		54	44			9		27	44
		3		55	38	18	7	—	31	28	38
		4		56	30			1		29	30
		5		57	24			2		30	24
		6		58	18			3		31	18
		7		59	8			4		32	12
		8	31	—	4			5		33	6
		9		—	58			6		34	—
	4	—		1	52			7		34	52
		1		2	46			8		35	46
		2		3	40			9		36	40
		3		4	32		8	—	31	37	34

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
21	8	1	31	38	26	22	1	8	32	11	32
		2		39	20			9		12	26
		3		40	14		2	—	32	13	20
		4		41	8			1		14	12
		5		42	2			2		15	6
		6		42	54			3		16	—
		7		43	48			4		16	52
		8		44	42			5		17	46
		9		45	36			6		18	40
	9	—	31	46	28			7		19	34
		1		47	22			8		20	28
		2		48	16			9		21	22
		3		49	10		3	—	32	22	16
		4		50	4			1		23	10
		5		50	56			2		24	2
		6		51	50			3		24	56
		7		52	44			4		25	50
		8		53	38			5		26	44
		9		54	32			6		27	38
22	—	—	31	55	26			7		28	32
		1		56	20			8		29	26
		2		57	14			9		30	18
		3		58	6		4	—	32	31	12
		4		59	—			1		32	4
		5		59	54			2		32	58
		6	32	—	50			3		33	52
		7		1	42			4		34	46
		8		2	34			5		35	40
		9		3	28			6		36	34
	1	—		4	24			7		37	28
		1		5	18			8		38	20
		2		6	10			9		39	14
		3		7	4		5	—	32	40	10
		4		7	58			1		41	4
		5		8	50			2		41	58
		6		9	44			3		42	52
		7		10	38			4		43	46

Länge d. Sch.			Gr. d. Wink.			Länge d. Sch.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S.	R.	F.	Z.	Gr	M.	S.
22	5	5	32	44	38	22	9	2	33	17	50
		6		45	34			3		18	42
		7		46	26			4		19	36
		8		47	20			5		20	30
		9		48	14			6		21	24
	6	—	32	49	8			7		22	18
		1		50	—			8		23	12
		2		50	56			9		24	6
		3		51	50	23	—	—	33	25	—
		4		52	42			1		25	54
		5		53	36			2		26	46
		6		54	30			3		27	40
		7		55	24			4		28	34
		8		56	18			5		29	28
		9		57	12			6		30	32
	7	—		58	4			7		31	16
		1		58	58			8		32	10
		2		59	54			9		33	4
		3	33	—	46		1	—	33	33	58
		4		1	40			1		34	52
		5		2	34			2		35	46
		6		3	28			3		36	40
		7		4	22			4		37	36
		8		5	16			5		38	28
		9		6	10			6		39	22
	8	—	33	7	4			7		40	14
		1		7	58			8		41	10
		2		8	50			9		42	2
		3		9	44		2	—	33	42	56
		4		10	38			1		43	50
		5		11	32			2		44	44
		6		12	26			3		45	38
		7		13	20			4		46	32
		8		14	14			5		47	26
		9		15	8			6		48	20
	9	—	33	16	2			7		49	14
		1		16	54			8		50	8

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
23	2	9	33	51	2	23	6	6	34	24	16
	3	—	33	51	56			7		25	12
		1		52	50			8		26	6
		2		53	44			9		27	—
		3		54	36		7	—	34	27	54
		4		55	30			1		28	48
		5		56	24			2		29	42
		6		57	18			3		30	36
		7		58	12			4		31	30
		8		59	8			5		32	24
		9	34	—	—			6		33	18
	4	—		—	56			7		34	12
		1		1	50			8		35	6
		2		2	42			9		36	—
		3		3	38		8	—	34	36	54
		4		4	30			1		37	48
		5		5	24			2		38	42
		6		6	18			3		39	36
		7		7	12			4		40	30
		8		8	6			5		41	24
		9		9	—			6		42	18
	5	—	34	9	54			7		43	12
		1		10	48			8		44	6
		2		11	44			9		45	—
		3		12	36		9	—	34	45	54
		4		13	30			1		46	48
		5		14	24			2		47	42
		6		15	18			3		48	36
		7		16	10			4		49	30
		8		17	6			5		50	24
		9		18	—			6		51	18
	6	—	34	18	54			7		52	12
		1		19	48			8		53	6
		2		20	42			9		54	—
		3		21	36		—	—	34	54	54
		4		22	30			1		55	48
		5		23	24			2		56	42

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M.	S.
24	—	3	34	57	36	24	4	—	35	30	58
		4		58	30			1		31	54
		5		59	24			2		32	46
		6	35	—	18			3		33	42
		7		1	12			4		34	34
		8		2	6			5		35	30
		9		3	—			6		36	22
	1	—		3	56			7		37	18
		1		4	50			8		38	12
		2		5	40			9		39	6
		3		6	36		5	—	35	40	—
		4		7	32			1		40	56
		5		8	26			2		41	48
		6		9	20			3		42	44
		7		10	14			4		43	36
		8		11	8			5		44	32
		9		12	2			6		45	24
	2	—	35	12	56			7		46	20
		1		13	50			8		47	14
		2		14	44			9		48	8
		3		15	38		6	—	35	49	2
		4		16	32			1		49	56
		5		17	26			2		50	50
		6		18	20			3		51	4
		7		19	14			4		52	44
		8		20	8			5		53	32
		9		21	2			6		54	26
	3	—	35	21	56.			7		55	2
		1		22	50			8		56	6
		2		23	44			9		57	0
		3		24	38		7	—	35	58	4
		4		25	32			1		59	58
		5		26	28			2		59	52
		6		27	22			3	36	—	46
		7		28	16			4		1	42
		8		29	10			5		2	34
		9		30	4			6		3	28

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
24	7	7	36	4	24	25	1	4	36	37	50
		8		5	18			5		38	46
		9		6	12			6		39	40
	8	—	36	7	6			7		40	34
		1		8	—			8		41	28
		2		8	54			9		42	22
		3		9	50		2	—	36	43	18
		4		10	42			1		44	10
		5		11	38			2		45	6
		6		12	32			3		46	—
		7		13	26			4		46	58
		8		14	20			5		47	50
		9		15	14			6		48	44
	9	—	36	16	8			7		49	38
		1		17	2			8		50	32
		2		17	56			9		51	26
		3		18	52		3	—	36	52	22
		4		19	44			1		53	14
		5		20	40			2		54	10
		6		21	34			3		55	4
		7		22	28			4		56	2
		8		23	22			5		56	54
		9		24	16			6		57	48
25	—	—	36	25	10			7		58	42
		1		26	4			8		59	36
		2		27	—			9	37	—	30
		3		27	56		4	—		1	26
		4		28	48			1		2	18
		5		29	44			2		3	14
		6		30	38			3		4	8
		7		31	32			4		5	2
		8		32	26			5		5	58
		9		33	20			6		6	50
	1	—	36	34	14			7		7	46
		1		35	8			8		8	40
		2		36	2			9		9	34
		3		36	58		5	—	37	10	30

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
25	5	1	37	11	32	25	8	8	37	44	58
		2		12	18			9		45	52
		3		13	12		9	—	37	46	48
		4		14	6			1		47	42
		5		15	2			2		48	38
		6		15	54			3		49	30
		7		16	50			4		50	26
		8		17	44			5		51	20
		9		18	38			6		52	14
	6	—	37	19	32			7		53	8
		1		20	26			8		54	4
		2		21	22			9		54	58
		3		22	16	26	—	—	37	55	52
		4		23	10			1		56	46
		5		24	4			2		57	40
		6		24	58			3		58	34
		7		25	54			4		59	30
		8		26	48			5	38	—	24
		9		27	42			6		1	18
	7	—	37	28	36			7		2	12
		1		29	30			8		3	8
		2		30	26			9		4	2
		3		31	20		1	—	38	4	58
		4		32	14			1		5	52
		5		33	8			2		6	46
		6		34	2			3		7	42
		7		34	58			4		8	36
		8		35	52			5		9	30
		9		36	46			6		10	24
	8	—	37	37	42			7		11	20
		1		38	36			8		12	14
		2		39	32			9		13	8
		3		40	24		2	—	38	14	4
		4		41	20			1		14	58
		5		42	14			2		15	52
		6		43	8			3		16	48
		7		44	2			4		17	42

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
26	2	5	38	18	36	26	6	2	38	52	20
		6		19	30			3		53	12
		7		20	26			4		54	8
		8		21	20			5		55	4
		9		22	14			6		56	58
	3	—	38	23	8			7		56	52
		1		24	2			8		57	46
		2		24	58			9		58	42
		3		25	52		7	—	38	59	36
		4		26	46			1	39	—	30
		5		27	42			2		1	24
		6		28	36			3		2	18
		7		29	30			4		3	14
		8		30	26			5		4	8
		9		31	20			6		5	2
	4	—	38	32	14			7		5	58
		1		33	8			8		6	52
		2		34	4			9		7	48
		3		34	58		8	—	39	8	42
		4		35	52			1		9	36
		5		36	48			2		10	30
		6		37	42			3		11	26
		7		38	36			4		12	20
		8		39	32			5		13	16
		9		40	26			6		14	10
	5	—	38	41	22			7		15	4
		1		42	16			8		16	—
		2		43	12			9		16	54
		3		44	4		9	—	39	17	48
		4		45	—			1		18	42
		5		45	56			2		19	36
		6		46	50			3		20	32
		7		47	44			4		21	26
		8		48	38			5		22	22
		9		49	34			6		23	16
	6	—	38	50	28			7		24	10
		1		51	24			8		25	6

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
26	9	9	39	25	—	27	3	6	39	59	52
27	—	—	39	26	58			7	40	—	46
		1		27	52			8		1	42
		2		28	46			9		2	36
		3		29	42		4	—	40	3	32
		4		30	36			1		4	28
		5		31	32			2		5	20
		6		32	26			3		6	16
		7		33	20			4		7	10
		8		34	14			5		8	6
		9		35	10			6		9	2
	1	—	39	36	4			7		9	56
		1		37	—			8		10	52
		2		37	54			9		11	46
		3		38	50		5	—	40	12	40
		4		39	40			1		13	34
		5		40	38			2		14	28
		6		41	34			3		15	24
		7		42	28			4		16	18
		8		43	24			5		17	14
		9		44	18			6		18	8
	2	—	39	45	12			7		19	4
		1		46	8			8		19	58
		2		47	2			9		20	54
		3		47	58		6	—	40	21	48
		4		48	48			1		22	44
		5		49	46			2		23	38
		6		50	42			3		24	32
		7		51	36			4		25	28
		8		52	32			5		26	22
		9		53	26			6		27	18
	3	—	39	54	22			7		28	12
		1		55	18			8		29	8
		2		56	10			9		30	2
		3		57	6		7	—	40	30	58
		4		58	—			1		31	52
		5		58	56			2		32	48

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
27	7	3	40	33	42	28	1	—	41	7	38
		4		34	36			1		8	34
		5		35	32			2		9	28
		6		36	26			3		10	24
		7		37	22			4		11	18
		8		38	16			5		12	14
		9		39	12			6		13	8
	8	—	40	40	8			7		14	4
		1		41	4			8		15	—
		2		41	58			9		15	56
		3		42	52		2	—	41	16	50
		4		43	48			1		17	44
		5		44	40			2		18	40
		6		45	38			3		19	34
		7		46	32			4		20	30
		8		47	28			5		21	24
		9		48	22			6		22	20
	9	—	40	49	18			7		23	14
		1		50	14			8		24	10
		2		51	10			9		25	6
		3		52	4		3	—	41	26	—
		4		52	58			1		26	56
		5		53	54			2		27	52
		6		54	46			3		28	46
		7		55	44			4		29	42
		8		56	38			5		30	36
		9		57	34			6		31	32
28	—	—	40	58	28			7		32	26
		1		59	24			8		33	22
		2	41	—	18			9		34	18
		3		1	10		4	—	41	35	12
		4		2	8			1		36	8
		5		3	4			2		37	2
		6		3	58			3		37	58
		7		4	54			4		38	52
		8		5	48			5		39	48
		9		6	44			6		40	44

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
28	4	7	41	41	38	28	8	4	42	15	40
		8		42	34			5		16	36
		9		43	28			6		17	32
	5	—	41	44	24			7		18	28
		1		45	18			8		19	22
		2		46	14			9		20	18
		3		47	8		9	—	42	21	12
		4		48	4			1		22	8
		5		48	58			2		23	4
		6		49	54			3		24	—
		7		50	50			4		24	54
		8		51	44			5		25	50
		9		52	40			6		26	46
	6	—	41	53	36			7		27	40
		1		54	32			8		28	36
		2		54	28			9		29	32
		3		56	22	29	—	—	42	30	26
		4		57	18			1		31	22
		5		58	12			2		32	16
		6		59	8			3		33	12
		7	42	—	2			4		34	8
		8		—	58			5		35	4
		9		1	54			6		35	58
	7	—		2	48			7		36	54
		1		3	44			8		37	50
		2		4	38			9		38	44
		3		5	34		1	—	42	39	40
		4		6	30			1		40	36
		5		7	26			2		41	30
		6		8	20			3		42	26
		7		9	16			4		43	22
		8		10	10			5		44	16
		9		11	6			6		45	14
	8	—	42	12	—			7		46	8
		1		12	56			8		47	4
		2		13	50			9		48	—
		3		14	46		2	—	42	48	54

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
29	2	1	42	49	50	29	5	8	43	24	—
		2		50	44			9		24	56
		3		51	42		6	—	43	25	52
		4		52	36			1		26	48
		5		53	32			2		27	42
		6		54	26			3		28	38
		7		55	22			4		29	34
		8		56	16			5		30	28
		9		57	12			6		31	24
	3	—		58	8			7		32	20
		1		59	4			8		33	16
		2	43	—	—			9		34	10
		3		—	54		7	—	43	35	8
		4		1	48			1		36	2
		5		2	46			2		36	58
		6		3	40			3		37	54
		7		4	36			4		38	50
		8		5	30			5		39	46
		9		6	26			6		40	40
	4	—	43	7	20			7		41	36
		1		8	16			8		42	33
		2		9	12			9		43	28
		3		10	8		8	—	43	44	22
		4		11	4			1		45	18
		5		11	58			2		46	14
		6		12	54			3		47	10
		7		13	50			4		48	4
		8		14	46			5		49	—
		9		15	42			6		49	56
	5	—	43	16	36			7		50	52
		1		17	32			8		51	48
		2		18	28			9		52	42
		3		19	22		9	—	43	53	38
		4		20	18			1		54	34
		5		21	14			2		55	30
		6		22	10			3		56	24
		7		23	4			4		57	20

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
29	9	5	43	58	16	30	3	2	44	32	36
		6		59	12			3	-	33	32
		7	44		8			4		34	28
		8		1	2			5		35	24
		9		1	58			6		36	18
30	—	—		2	54			7		37	14
		1		3	50			8		38	10
		2		4	46			9		39	6
		3		5	42		4	—	44	40	2
		4		6	38			1		40	58
		5		7	34			2		41	54
		6		8	28			3		42	50
		7		9	26			4		43	44
		8		10	20			5		44	40
		9		11	16			6		45	36
	1	—	44	12	12			7		46	32
		1		13	6			8		47	28
		2		14	2			9		48	24
		3		14	58		5	—	44	49	20
		4		15	54			1		50	14
		5		16	50			2		51	10
		6		17	46			3		52	6
		7		18	42			4		53	2
		8		19	38			5		53	58
		9		20	32			6		54	54
	2	—	44	21	30			7		55	50
		1		22	24			8		56	44
		2		23	20			9		57	40
		3		24	16		6	—	44	58	36
		4		25	10			1		59	32
		5		26	6			2	45	—	30
		6		27	2			3		1	26
		7		27	58			4		2	20
		8		28	54			5		3	18
		9		29	50			6		4	12
	3	—	44	30	44			7		5	8
		1		31	40			8		6	4

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
30	6	9	45	7	—	31	—	6	45	41	26
	7	—	45	7	56			7		42	22
		1		8	52			8		43	18
		2		9	46			9		44	14
		3		10	42		1	—	45	45	14
		4		11	38			1		46	8
		5		12	34			2		47	4
		6		13	32			3		48	—
		7		14	28			4		48	56
		8		15	22			5		49	54
		9		16	20			6		50	48
	8	—	45	17	14			7		51	46
		1		18	10			8		52	40
		2		19	6			9		53	38
		3		20	2		2	—	45	54	32
		4		20	58			1		55	28
		5		21	54			2		56	24
		6		22	50			3		57	20
		7		23	46			4		58	16
		8		24	42			5		59	12
		9		25	38			6	46	—	8
	9	—	45	26	32			7		1	4
		1		27	30			8		2	—
		2		28	24			9		2	58
		3		29	20		3	—	46	3	52
		4		30	16			1		4	50
		5		31	12			2		5	44
		6		32	8			3		6	42
		7		33	4			4		7	36
		8		34	—			5		8	32
		9		34	56			6		9	28
31	—	—	45	35	52			7		10	24
		1		36	48			8		11	20
		2		37	44			9		12	16
		3		38	40		4	—	46	13	12
		4		39	34			1		14	8
		5		40	32			2		15	4

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
31	4	3	46	16	2	31	8	—	46	50	38
		4		16	56			1		51	34
		5		17	54			2		52	30
		6		18	48			3		53	26
		7		19	46			4		54	22
		8		20	40			5		55	18
		9		21	36			6		56	14
	5	—	46	22	34			7		57	10
		1		23	30			8		58	6
		2		24	26			9		59	2
		3		25	22		9	—	47	—	—
		4		26	18			1		—	56
		5		27	14			2		1	52
		6		28	10			3		2	48
		7		29	6			4		3	46
		8		30	2			5		4	40
		9		30	58			6		5	38
	6	—	46	31	56			7		6	34
		1		32	52			8		7	30
		2		33	48			9		8	26
		3		34	44	32	—	—	47	9	22
		4		35	40			1		10	18
		5		36	36			2		11	14
		6		37	32			3		12	14
		7		38	28			4		13	10
		8		39	24			5		14	4
		9		40	20			6		15	—
	7	—	46	41	16			7		15	56
		1		42	12			8		16	52
		2		43	8			9		17	48
		3		44	4		1	—	47	18	44
		4		45	2			1		19	40
		5		45	58			2		20	38
		6		46	54			3		21	34
		7		47	50			4		22	30
		8		48	46			5		23	28
		9		49	42			6		24	24

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
32	1	7	47	25	20	32	5	4	48	—	6
		8		26	18			5		1	2
		9		27	12			6		1	58
	2	—	47	28	8			7		2	54
		1		29	6			8		3	52
		2		30	2			9		4	50
		3		30	58		6	—	48	5	44
		4		31	54			1		6	40
		5		32	50			2		7	36
		6		33	46			3		8	32
		7		34	42			4		9	28
		8		35	40			5		10	26
		9		36	36			6		11	22
	3	—	47	37	32			7		12	18
		1		38	30			8		13	14
		2		39	26			9		14	12
		3		40	22		7	—	48	15	8
		4		41	20			1		16	6
		5		42	14			2		17	4
		6		43	10			3		17	—
		7		44	8			4		18	56
		8		45	4			5		19	54
		9		46	—			6		20	48
	4	—	47	46	56			7		21	46
		1		47	52			8		22	42
		2		48	48			9		23	40
		3		49	46		8	—	48	24	34
		4		50	42			1		25	32
		5		51	38			2		26	28
		6		52	34			3		27	24
		7		53	30			4		28	20
		8		54	26			5		29	18
		9		55	24			6		30	14
	5	—	47	56	20			7		31	12
		1		57	16			8		32	6
		2		58	12			9		33	4
		3		59	10		9	—	48	34	—

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	Gr	M	S.	N.	F.	.	Gr	M	S.
32	9	1	48	34	56	33	2	8	49	9	50
		2		35	54			9		10	48
		3		36	50		3	—	49	11	44
		4		37	48			1		12	40
		5		38	42			2		13	34
		6		39	40			3		14	34
		7		40	36			4		15	30
		8		41	34			5		16	26
		9		42	30			6		17	24
33	—	—	48	43	26			7		18	22
		1		44	22			8		19	20
		2		45	20			9		20	16
		3		46	16		4	—	49	21	14
		4		47	12			1		22	10
		5		48	8			2		23	8
		6		49	6			3		24	2
		7		50	2			4		25	—
		8		50	58			5		25	58
		9		51	56			6		26	54
	1	—	48	52	52			7		27	52
		1		53	48			8		28	48
		2		54	46			9		29	44
		3		55	42		5	—	49	30	40
		4		56	38			1		31	38
		5		57	36			2		32	34
		6		58	52			3		33	32
		7		59	26			4		34	28
		8	49	—	24			5		35	26
		9		1	22			6		36	22
	2	—		2	18			7		37	18
		1		3	14			8		38	14
		2		4	10			9		39	12
		3		5	8		6	—	49	40	8
		4		6	4			1		41	6
		5		7	—			2		42	—
		6		7	58			3		43	—
		7		8	54			4		43	56

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
33	6	5	49	44	52	34	—	2	50	20	—
		6		45	50			3		20	54
		7		46	46			4		21	54
		8		47	44			5		22	48
		9		48	40			6		23	50
	7	—	49	49	38			7		24	44
		1		50	34			8		25	42
		2		51	30			9		26	38
		3		52	28		1	—	50	27	36
		4		53	24			1		28	32
		5		54	20			2		29	28
		6		55	16			3		30	26
		7		56	14			4		31	24
		8		57	10			5		32	20
		9		58	8			6		33	18
	8	—		59	6			7		34	14
		1	50	—	2			8		35	12
		2		1	—			9		36	8
		3		1	56		2	—	50	37	6
		4		2	52			1		38	4
		5		3	50			2		38	58
		6		4	46			3		39	58
		7		5	44			4		40	52
		8		6	40			5		41	54
		9		7	38			6		42	48
	9	—	50	8	34			7		43	46
		1		9	32			8		44	42
		2		10	28			9		45	40
		3		11	28		3	—	50	46	36
		4		12	22			1		47	32
		5		13	20			2		48	30
		6		14	16			3		49	26
		7		15	14			4		50	23
		8		16	10			5		51	20
		9		17	8			6		52	18
34	—	—	50	18	4			7		53	14
		1		19	2			8		54	12

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
34	3	9	50	55	8	34	7	6	51	30	4
	4	—	50	56	6			7		31	22
		1		57	3			8		32	18
		2		58	—			9		33	16
		3		58	58		8	—	51	34	14
		4		59	54			1		35	12
		5	51	—	52			2		36	8
		6		1	48			3		37	6
		7		2	46			4		38	2
		8		3	42			5		39	—
		9		4	40			6		39	58
	5	—		5	36			7		40	58
		1		6	34			8		41	52
		2		7	32			9		42	50
		3		8	28		9	—	51	43	48
		4		9	26			1		44	44
		5		10	24			2		45	42
		6		11	22			3		46	38
		7		12	18			4		47	36
		8		13	16			5		48	32
		9		14	12			6		49	30
	6	—	51	15	10			7		50	28
		1		16	6			8		51	26
		2		17	4			9		52	22
		3		18	—	35	—	—	51	53	20
		4		18	58			1		54	16
		5		19	56			2		55	14
		6		20	52			3		56	12
		7		21	50			4		57	10
		8		22	48			5		58	6
		9		23	46			6		59	4
	7	—	51	24	42			7	52	—	—
		1		25	40			8		—	58
		2		26	36			9		1	56
		3		27	34		1	—		2	56
		4		28	30			1		3	50
		5		29	28			2		4	48

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
35	1	3	52	5	46	35	5	—	52	41	12
		4		6	44			1		42	10
		5		7	40			2		43	8
		6		8	36			3		44	4
		7		9	34			4		45	2
		8		10	30			5		46	—
		9		11	28			6		46	58
	2	—	52	12	26			7		47	56
		1		13	24			8		48	52
		2		14	20			9		49	50
		3		15	18		6	—	52	50	48
		4		16	14			1		51	46
		5		17	12			2		52	42
		6		18	10			3		53	40
		7		19	8			4		54	38
		8		20	6			5		55	36
		9		21	4			6		56	32
	3	—	52	22	2			7		57	30
		1		23	—			8		58	28
		2		23	58			9		59	26
		3		24	54		7	—	53	—	24
		4		25	54			1		1	22
		5		26	50			2		2	18
		6		27	48			3		3	16
		7		28	44			4		4	14
		8		29	42			5		5	12
		9		30	40			6		6	8
	4	—	52	31	38			7		7	6
		1		32	34			8		8	4
		2		33	32			9		9	2
		3		34	30		8	—	53	10	—
		4		35	28			1		10	58
		5		36	24			2		11	54
		6		37	22			3		12	52
		7		38	20			4		13	50
		8		39	18			5		14	48
		9		40	14			6		15	44

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
35	8	7	53	16	42	36	2	4	53	52	22
		8		17	40			5		53	20
		9		18	38			6		54	18
	9	—	53	19	36			7		55	16
		1		20	34			8		56	14
		2		21	32			9		57	12
		3		22	30		3	—		58	10
		4		23	28			1		59	6
		5		24	26			2	54	—	4
		6		25	24			3		1	2
		7		26	20			4		2	0
		8		27	18			5		2	58
		9		28	16			6		3	56
36	—	—	53	29	14			7		4	54
		1		30	12			8		5	52
		2		31	10			9		6	50
		3		32	8		4	—	54	7	48
		4		33	6			1		8	46
		5		34	4			2		9	44
		6		35	2			3		10	42
		7		36	0			4		11	40
		8		36	58			5		12	36
		9		37	56			6		13	34
	1	—	53	38	52			7		14	32
		1		39	50			8		15	30
		2		40	48			9		16	28
		3		41	46		5	—	54	17	26
		4		42	42			1		18	24
		5		43	40			2		19	22
		6		44	38			3		20	20
		7		45	34			4		21	18
		8		46	32			5		22	16
		9		47	30			6		23	16
	2	—	53	48	28			7		24	12
		1		49	26			8		25	12
		2		50	24			9		26	8
		3		51	22		6	—	54	27	4

L

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
36	6	1	54	28	2	36	9	8	55	3	54
		2		29	—			9		4	50
		3		30	58	37	—	—	55	5	50
		4		30	58			1		6	48
		5		31	54			2		7	48
		6		32	54			3		8	44
		7		33	52			4		9	42
		8		34	50			5		10	40
		9		35	46			6		11	38
	7	—	54	36	46			7		12	36
		1		37	42			8		13	34
		2		38	42			9		14	32
		3		39	38		1	—	55	15	32
		4		40	38			1		16	28
		5		41	36			2		17	28
		6		42	34			3		18	26
		7		43	34			4		19	24
		8		44	30			5		20	22
		9		45	30			6		21	20
	8	—	54	46	26			7		22	18
		1		47	24			8		23	16
		2		48	22			9		24	14
		3		49	20		2	—	55	25	12
		4		50	20			1		26	10
		5		51	16			2		27	10
		6		52	16			3		28	8
		7		53	14			4		29	6
		8		54	12			5		30	4
		9		55	8			6		31	2
	9	—	54	56	8			7		32	—
		1		57	6			8		32	58
		2		58	2			9		33	56
		3		59	2		3	—	55	34	54
		4	55	—	—			1		35	52
		5		—	58			2		36	52
		6		1	58			3		37	48
		7		2	54			4		38	48

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
37	3	5	55	39	46	37	7	2	56	15	50
		6		40	44			3		16	48
		7		41	44			4		17	46
		8		42	42			5		18	46
		9		43	40			6		19	44
	4	—	55	44	40			7		20	42
		1		45	38			8		21	40
		2		46	36			9		22	38
		3		47	36		8	—	56	23	36
		4		48	32			1		24	34
		5		49	32			2		25	32
		6		50	30			3		26	30
		7		51	28			4		27	30
		8		52	26			5		28	28
		9		53	26			6		29	26
	5	—		54	22			7		30	26
		1		55	22			8		31	24
		2		56	20			9		32	22
		3		57	18		9	—	56	33	20
		4		58	16			1		34	20
		5		59	16			2		35	18
		6	56	—	14			3		36	16
		7		1	12			4		37	14
		8		2	10			5		38	14
		9		3	8			6		39	12
	6	—		4	6			7		40	10
		1		5	6			8		41	10
		2		6	2			9		42	8
		3		7	2	38	—	—	56	43	6
		4		8	—			1		44	6
		5		8	58			2		45	4
		6		9	56			3		46	2
		7		10	56			4		47	—
		8		11	54			5		47	58
		9		12	54			6		48	56
	7	—	56	13	52			7		49	56
		1		14	52			8		50	54

Länge d.Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d.Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
38	—	9	56	51	54	38	4	6	57	28	8
	1	—	56	52	52			7		29	6
		1		53	50			8		30	6
		2		54	50			9		31	4
		3		54	48		5	—	57	32	4
		4		56	46			1		33	2
		5		57	46			2		34	2
		6		58	44			3		35	—
		7		59	44			4		35	58
		8	57	—	42			5		36	56
		9		1	42			6		37	56
	2	—		2	40			7		38	54
		1		3	40			8		39	54
		2		4	38			9		40	52
		3		5	38		6	—	58	41	52
		4		6	34			1		42	50
		5		7	34			2		43	48
		6		8	32			3		44	48
		7		9	32			4		45	46
		8		10	30			5		46	46
		9		11	30			6		47	44
	3	—	57	12	26			7		48	42
		1		13	26			8		49	42
		2		14	24			9		50	40
		3		15	24		7	—	58	51	40
		4		16	22			1		52	38
		5		17	22			2		53	38
		6		18	20			3		54	36
		7		19	18			4		55	36
		8		20	16			5		56	34
		9		21	16			6		57	34
	4	—	57	22	14			7		58	32
		1		23	14			8		59	30
		2		24	12			9	58	—	30
		3		25	12		8	—		1	28
		4		26	10			1		2	28
		5		27	10			2		3	26

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
38	8	3	58	4	26	39	2	—	58	40	52
		4		5	24			1		41	52
		5		6	24			2		42	50
		6		7	22			3		43	50
		7		8	22			4		44	48
		8		9	20			5		45	48
		9		10	20			6		46	46
	9	—	58	11	18			7		47	46
		1		12	18			8		48	46
		2		13	16			9		49	44
		3		14	16		3	—	58	50	44
		4		15	14			1		51	42
		5		16	14			2		52	42
		6		17	12			3		53	40
		7		18	12			4		54	40
		8		19	10			5		55	40
		9		20	10			6		56	38
39	—	—	58	21	10			7		57	38
		1		22	8			8		58	36
		2		23	8			9		59	36
		3		24	6		4	—	59	—	34
		4		25	6			1		1	34
		5		26	4			2		2	34
		6		27	4			3		3	32
		7		28	2			4		4	32
		8		29	2			5		5	30
		9		30	—			6		6	30
	1	—	58	31	—			7		7	30
		1		32	—			8		8	28
		2		33	—			9		9	28
		3		34	—		5	—	59	10	28
		4		34	58			1		11	28
		5		35	58			2		12	26
		6		36	56			3		13	26
		7		37	56			4		14	26
		8		38	54			5		15	24
		9		39	54			6		16	24

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
39	5	7	59	17	24	39	9	4	59	54	2
		8		18	22			5		54	2
		9		19	22			6		56	2
	6	—	59	20	22			7		57	—
		1		21	22			8		58	2
		2		22	20			9		59	2
		3		23	22	40	—	—	60	—	—
		4		24	20			1		1	—
		5		25	20			2		2	—
		6		26	18			3		2	58
		7		27	18			4		3	58
		8		28	16			5		4	58
		9		29	18			6		5	58
	7	—	59	30	16			7		6	56
		1		31	16			8		7	56
		2		32	14			9		8	56
		3		33	14		1	—	60	9	56
		4		34	12			1		10	54
		5		35	14			2		11	54
		6		36	12			3		12	54
		7		37	12			4		13	54
		8		38	10			5		14	54
		9		39	12			6		15	54
	8	—	59	40	10			7		16	52
		1		41	10			8		17	52
		2		42	8			9		18	52
		3		43	8		2	—	60	19	52
		4		44	6			1		20	52
		5		45	8			2		21	50
		6		46	6			3		22	50
		7		47	6			4		23	50
		8		48	4			5		24	50
		9		49	4			6		25	50
	9	—	59	50	4			7		26	50
		1		51	2			8		27	48
		2		52	4			9		28	48
		3		53	4		3	—	60	29	48

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
40	3	1	60	30	48	40	6	8	61	7	42
		2		31	46			9		8	40
		3		32	46		7	—	61	9	42
		4		33	46			1		10	40
		5		34	46			2		11	40
		6		35	46			3		12	40
		7		36	44			4		13	40
		8		37	44			5		14	40
		9		38	44			6		15	40
	4	—	60	39	44			7		16	40
		1		40	46			8		17	40
		2		41	48			9		18	40
		3		42	46		8	—	61	19	40
		4		43	46			1		20	40
		5		44	44			2		21	40
		6		45	46			3		22	38
		7		46	44			4		23	40
		8		47	46			5		24	38
		9		48	44			6		25	40
	5	—	60	49	46			7		26	38
		1		50	44			8		27	40
		2		51	44			9		28	38
		3		52	42		9	—	61	29	40
		4		53	44			1		30	38
		5		54	42			2		31	40
		6		55	44			3		32	38
		7		56	42			4		33	40
		8		57	44			5		34	40
		9		58	42			6		35	38
	6	—		59	42			7		36	40
		1	61	—	42			8		37	38
		2		1	42			9		38	38
		3		2	42	41	—	—	61	39	40
		4		3	42			1		40	38
		5		4	42			2		41	40
		6		5	42			3		42	40
		7		6	40			4		43	40

Länge d. Sch.			Gr. d. Wink.			Länge d. Sch.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
41	—	5	61	44	40	41	4	2	62	21	48
		6		45	40			3		22	46
		7		46	40			4		23	48
		8		47	40			5		24	48
		9		48	40			6		25	48
	1	—	61	49	40			7		26	48
		1		50	40			8		27	50
		2		51	40			9		28	48
		3		52	40		5	—	62	29	50
		4		53	40			1		30	48
		5		54	40			2		31	50
		6		55	40			3		32	50
		7		56	40			4		33	50
		8		57	40			5		34	52
		9		58	40			6		35	52
	2	—		59	40			7		36	52
		1	62	—	40			8		37	52
		2		1	42			9		38	54
		3		2	42		6	—	62	39	54
		4		3	42			1		40	52
		5		4	42			2		41	54
		6		5	44			3		42	54
		7		6	44			4		43	54
		8		7	46			5		44	54
		9		8	44			6		45	56
	3	—	62	9	46			7		46	54
		1		10	44			8		47	56
		2		11	46			9		48	56
		3		12	44		7	—	62	49	56
		4		13	44			1		50	56
		5		14	46			2		51	58
		6		15	46			3		52	58
		7		16	46			4		53	58
		8		17	48			5		54	58
		9		18	46			6		56	—
	4	—	62	19	48			7		57	—
		1		20	46			8		58	—

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	Gr	M	S.	N	F.	Z.	Gr	M	S.
41	7	9	62	59	—	42	1	6	63	36	22
	8	—	63	—	—			7		37	24
		1		1	—			8		38	24
		2		2	—			9		39	26
		3		3	2		2	—	63	40	24
		4		4	2			1		41	26
		5		5	2			2		42	26
		6		6	2			3		43	28
		7		7	4			4		44	26
		8		8	4			5		45	30
		9		9	4			6		46	28
	9	—	63	10	4			7		47	30
		1		11	6			8		48	30
		2		12	6			9		49	32
		3		13	6		3	—	63	50	32
		4		14	6			1		51	32
		5		15	8			2		52	32
		6		16	8			3		53	34
		7		17	8			4		54	34
		8		18	10			5		55	36
		9		19	10			6		56	36
42	—	—	63	20	10			7		57	38
		1		21	12			8		58	38
		2		22	12			9		59	40
		3		23	12		4	—	64	—	40
		4		24	12			1		1	42
		5		25	14			2		2	40
		6		26	14			3		3	42
		7		27	14			4		4	42
		8		28	16			5		5	44
		9		29	16			6		6	44
	1	—	63	30	16			7		7	46
		1		31	18			8		8	44
		2		32	18			9		9	46
		3		33	18		5	—	64	10	48
		4		34	22			1		11	48
		5		35	22			2		12	48

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
42	5	3	64	13	50	42	9	—	64	51	26
		4		14	50			1		52	28
		5		15	52			2		53	28
		6		16	52			3		54	30
		7		17	54			4		55	30
		8		18	54			5		56	32
		9		19	56			6		57	34
	6	—	64	20	56			7		58	34
		1		21	58			8		59	36
		2		22	58			9	65	—	36
		3		24	—	43	—	—		1	38
		4		25	—			1		2	38
		5		26	2			2		3	40
		6		27	2			3		4	40
		7		28	4			4		5	42
		8		29	4			5		6	44
		9		30	6			6		7	48
	7	—	64	31	6			7		8	46
		1		32	6			8		9	50
		2		33	8			9		10	50
		3		34	8		1	—	65	11	52
		4		35	10			1		12	52
		5		36	10			2		13	54
		6		37	12			3		14	54
		7		38	12			4		15	56
		8		39	14			5		16	56
		9		40	14			6		18	—
	8	—	64	41	16			7		19	—
		1		42	16			8		20	2
		2		43	18			9		21	2
		3		44	18		2	—	65	22	4
		4		45	20			1		23	4
		5		46	20			2		24	4
		6		47	22			3		25	6
		7		48	22			4		26	6
		8		49	24			5		27	10
		9		50	24			6		28	10

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
43	2	7	65	29	12	43	6	4	66	7	4
		8		30	12			5		8	4
		9		31	14			6		9	6
	3	—	65	32	14			7		10	8
		1		33	18			8		11	10
		2		34	18			9		12	10
		3		35	20		7	—	66	13	12
		4		36	20			1		14	14
		5		37	22			2		15	14
		6		38	24			3		16	16
		7		39	26			4		17	16
		8		40	26			5		18	18
		9		41	28			6		19	20
	4	—	65	42	28			7		20	22
		1		43	30			8		21	24
		2		44	30			9		22	26
		3		45	32		8	—	66	23	28
		4		46	34			1		24	30
		5		47	36			2		25	30
		6		48	38			3		26	32
		7		49	38			4		27	34
		8		50	40			5		28	36
		9		51	40			6		29	38
	5	—	65	52	42			7		30	38
		1		53	42			8		31	40
		2		54	46			9		32	42
		3		55	46		9	—	66	33	44
		4		56	48			1		34	46
		5		57	50			2		35	48
		6		58	50			3		36	50
		7		59	52			4		37	52
		8	66	—	54			5		38	54
		9		1	56			6		39	56
	6	—	66	2	58			7		40	56
		1		4	—			8		41	58
		2		5	—			9		43	—
		3		6	2	44	—	—	66	44	2

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
44	—	1	66	45	6	44	3	8	67	23	16
		2		46	6			9		24	16
		3		47	8		4	—	67	25	18
		4		48	8			1		26	18
		5		49	12			2		27	20
		6		50	12			3		28	22
		7		51	16			4		29	24
		8		52	16			5		30	26
		9		53	20			6		31	30
	1	—	66	54	20			7		32	32
		1		55	24			8		33	34
		2		56	24			9		34	36
		3		57	28		5	—	67	35	38
		4		58	28			1		36	40
		5		59	30			2		37	42
		6	67	—	32			3		38	44
		7		1	32			4		39	46
		8		2	34			5		40	48
		9		3	38			6		41	50
	2	—		4	38			7		42	52
		1		5	42			8		43	54
		2		6	42			9		44	56
		3		7	46		6	—	67	45	58
		4		8	46			1		47	—
		5		9	50			2		48	2
		6		10	50			3		49	4
		7		11	54			4		50	6
		8		12	54			5		51	8
		9		13	58			6		52	10
	3	—	67	14	58			7		53	12
		1		16	2			8		54	14
		2		17	2			9		55	16
		3		18	4		7	—	67	56	18
		4		19	8			1		57	22
		5		20	8			2		58	24
		6		21	12			3		59	26
		7		22	12			4	68	—	28

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	Gr	M	S.	N	F.	Z.	Gr	M	S.
44	7	5	68	1	30	45	1	2	68	40	—
		6		2	32			3		41	2
		7		3	34			4		42	4
		8		4	36			5		43	6
		9		5	38			6		44	10
	8	—	68	6	40			7		45	10
		1		7	44			8		46	14
		2		8	46			9		47	16
		3		9	48		2	—	68	48	16
		4		10	50			1		49	20
		5		11	54			2		50	20
		6		12	56			3		51	24
		7		13	58			4		52	26
		8		15	—			5		53	30
		9		16	2			6		54	32
	9	—	68	17	4			7		55	36
		1		18	6			8		56	38
		2		19	8			9		57	40
		3		20	10		3	—		58	42
		4		21	12			1		59	46
		5		22	16			2	69	—	46
		6		23	20			3		1	50
		7		24	20			4		2	52
		8		25	24			5		3	56
		9		26	26			6		4	58
45	—	—	68	27	30			7		6	2
		1		28	30			8		7	2
		2		29	34			9		8	4
		3		30	36		4	—	69	9	8
		4		31	40			1		10	10
		5		32	40			2		11	12
		6		33	44			3		12	16
		7		34	44			4		13	18
		8		35	50			5		14	22
		9		36	50			6		15	24
	1	—	68	37	54			7		16	26
		1		38	54			8		17	28

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
45	4	9	69	18	30	45	8	6	69	57	14
	5	—	69	19	34			7		58	18
		1		20	36			8		59	20
		2		21	38			9	70	—	22
		3		22	40		9	—		1	24
		4		23	42			1		2	30
		5		24	46			2		3	32
		6		25	48			3		4	36
		7		26	52			4		5	38
		8		27	56			5		6	42
		9		28	58			6		7	44
	6	—	69	30	—			7		8	48
		1		31	4			8		9	54
		2		32	6			9		10	54
		3		33	10	46	—	—	70	12	—
		4		34	12			1		13	2
		5		35	16			2		14	2
		6		36	18			3		15	8
		7		37	20			4		16	8
		8		38	24			5		17	14
		9		39	26			6		18	16
	7	—	69	40	28			7		19	20
		1		41	32			8		20	22
		2		42	34			9		21	26
		3		43	36		1	—	70	22	28
		4		44	40			1		23	30
		5		45	42			2		24	32
		6		46	46			3		25	34
		7		47	48			4		26	38
		8		48	52			5		27	40
		9		49	54			6		28	44
	8	—	69	50	58			7		29	48
		1		52	—			8		30	58
		2		53	2			9		31	56
		3		54	6		2	—	70	33	—
		4		55	8			1		34	2
		5		56	12			2		35	6

Länge d. Geb.			Gr. d. Wink.			Länge d. Geb.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F	Z.	Gr	M	S.
46	2	3	70	36	8	46	6	—	71	15	12
		4		37	12			1		16	16
		5		38	16			2		17	18
		6		39	20			3		18	22
		7		40	22			4		19	24
		8		41	26			5		20	28
		9		42	28			6		21	32
	3	—	70	43	32			7		22	36
		1		44	34			8		23	38
		2		45	38			9		24	42
		3		46	40		7	—	71	25	46
		4		47	46			1		26	50
		5		48	48			2		27	54
		6		49	52			3		28	56
		7		50	54			4		30	—
		8		51	58			5		31	4
		9		53	—			6		32	6
	4	—	70	54	4			7		33	10
		1		55	8			8		34	14
		2		56	10			9		35	18
		3		57	14		8	—	71	36	20
		4		58	16			1		37	24
		5		59	20			2		38	28
		6	71	—	24			3		39	32
		7		1	28			4		40	36
		8		2	30			5		41	40
		9		3	34			6		42	42
	5	—	71	4	36			7		43	46
		1		5	40			8		44	50
		2		6	42			9		45	54
		3		7	46		9	—	71	46	56
		4		8	50			1		48	—
		5		9	52			2		49	4
		6		10	56			3		50	8
		7		11	58			4		51	10
		8		13	2			5		52	14
		9		14	8			6		53	18

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.
46	9	7	71	54	22
		8		55	26
		9		56	30
47	—	—	71	57	34
		1		58	38
		2		59	44
		3	72	—	46
		4		1	52
		5		2	54
		6		4	—
		7		5	2
		8		6	4
		9		7	10
	1	—	72	8	12
		1		9	18
		2		10	20
		3		11	26
		4		12	28
		5		13	30
		6		14	36
		7		15	40
		8		16	44
		9		17	48
	2	—	72	18	52
		1		19	54
		2		21	—
		3		22	2
		4		23	4
		5		24	10
		6		25	12
		7		26	18
		8		27	20
		9		28	26
	3	—	72	29	30
		1		30	36
		2		31	40
		3		32	44

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.
47	3	4	72	33	48
		5		34	52
		6		35	54
		7		36	58
		8		38	2
		9		39	4
	4	—	72	40	8
		1		41	14
		2		42	16
		3		43	22
		4		44	24
		5		45	30
		6		46	34
		7		47	38
		8		48	42
		9		49	46
	5	—	72	50	50
		1		51	54
		2		52	58
		3		54	2
		4		55	6
		5		56	10
		6		57	14
		7		58	18
		8		59	22
		9	73	—	26
	6	—		1	32
		1		2	34
		2		3	38
		3		4	42
		4		5	48
		5		6	52
		6		7	56
		7		9	—
		8		10	4
		9		11	8
	7	—	73	12	12

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr.	M.	S.	R.	F.	Z.	Gr.	M.	S.
47	7	1	73	13	16	48	—	8	73	53	—
		2		14	20			9		54	4
		3		15	26		1	—	7	55	10
		4		16	30			1		56	12
		5		17	34			2		57	18
		6		18	38			3		58	22
		7		19	42			4		59	28
		8		20	48			5	74	—	32
		9		21	52			6		1	18
	8	—	73	22	56			7		2	40
		1		24	—			8		3	48
		2		25	4			9		4	50
		3		26	8		2	—		5	56
		4		27	12			1		7	—
		5		28	16			2		8	2
		6		29	22			3		9	8
		7		30	26			4		10	12
		8		31	30			5		11	18
		9		32	34			6		12	22
	9	—	73	33	38			7		13	28
		1		34	42			8		14	32
		2		35	46			9		15	36
		3		36	50		3	—	74	16	40
		4		37	56			1		17	46
		5		39	—			2		18	50
		6		40	6			3		19	54
		7		41	10			4		21	—
		8		42	14			5		22	4
		9		43	18			6		23	10
48	—	—	73	44	22			7		24	16
		1		45	26			8		25	20
		2		46	30			9		26	26
		3		47	36		4	—	74	27	30
		4		48	40			1		28	32
		5		49	44			2		29	38
		6		50	50			3		30	42
		7		51	54			4		31	48

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
48	4	5	74	32	52	48	8	2	75	12	54
		6		33	58			3		14	—
		7		35	2			4		15	4
		8		36	6			5		16	10
		9		37	10			6		17	14
	5	—	74	38	16			7		18	20
		1		39	22			8		19	26
		2		40	26			9		20	30
		3		41	32		9	—	75	21	36
		4		42	34			1		22	40
		5		43	42			2		23	46
		6		44	44			3		24	50
		7		45	52			4		25	46
		8		46	54			5		27	—
		9		48	2			6		28	6
	6	—	74	49	4			7		29	12
		1		50	10			8		30	16
		2		51	12			9		31	22
		3		52	18	49	—	—	75	32	26
		4		53	24			1		33	32
		5		54	28			2		34	36
		6		55	34			3		35	42
		7		56	36			4		36	48
		8		57	44			5		37	54
		9		58	46			6		39	—
	7	—		59	54			7		40	4
		1	75	—	58			8		41	10
		2		2	6			9		42	14
		3		3	10		1	—	75	43	20
		4		4	16			1		44	24
		5		5	20			2		45	30
		6		6	26			3		46	34
		7		7	30			4		47	40
		8		8	36			5		48	46
		9		9	40			6		49	50
	8	—	75	10	44			7		50	56
		1		11	50			8		52	—

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F	Z.	Gr	M	S.	R.	F	Z.	Gr	M	S.
49	1	9	75	53	8	49	5	6	76	33	32
	2	—	75	54	14			7		34	40
		1		55	22			8		35	46
		2		56	24			9		36	52
		3		57	32		6	—	76	37	58
		4		58	36			1		39	2
		5		59	44			2		40	6
		6	76	—	48			3		41	14
		7		1	54			4		42	18
		8		2	58			5		43	26
		9		4	2			6		44	30
	3	—	76	5	10			7		45	38
		1		6	14			8		46	42
		2		7	20			9		47	50
		3		8	24		7	—	76	48	54
		4		9	32			1		49	2
		5		10	36			2		51	6
		6		11	44			3		52	10
		7		12	48			4		53	18
		8		13	54			5		54	22
		9		14	58			6		55	30
	4	—	76	16	4			7		56	34
		1		17	10			8		57	42
		2		18	14			9		58	46
		3		19	20		8	—		59	54
		4		20	26			1	77	1	—
		5		21	34			2		2	6
		6		22	38			3		3	10
		7		23	46			4		4	18
		8		24	50			5		5	22
		9		25	56			6		6	30
	5	—	76	27	—			7		7	34
		1		28	6			8		8	42
		2		29	12			9		9	48
		3		30	16		9	—	77	10	52
		4		31	22			1		12	—
		5		32	28			2		13	4

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
49	9	3	77	14	10	50	3	—	77	54	56
		4		15	14			1		56	2
		5		16	20			2		57	10
		6		17	28			3		58	16
		7		18	36			4		59	22
		8		19	42			5	78	—	30
		9		20	48			6		1	36
50	—	—	77	21	52			7		2	2
		1		22	58			8		3	48
		2		24	2			9		4	54
		3		25	10		4	—	78	6	—
		4		26	16			1		7	8
		5		27	22			2		8	14
		6		28	28			3		9	22
		7		29	34			4		10	26
		8		30	40			5		11	34
		9		31	46			6		12	40
	1	—	77	32	52			7		13	48
		1		33	58			8		14	54
		2		35	4			9		16	2
		3		36	10		5	—	78	17	6
		4		37	18			1		18	12
		5		38	22			2		19	20
		6		39	30			3		20	24
		7		40	36			4		21	34
		8		41	42			5		22	38
		9		42	48			6		23	46
	2	—	77	43	54			7		24	52
		1		45	—			8		26	—
		2		46	6			9		27	6
		3		47	12		6	—	78	28	10
		4		48	18			1		29	18
		5		49	24			2		30	24
		6		50	30			3		31	32
		7		51	36			4		32	38
		8		52	42			5		33	46
		9		53	48			6		34	54

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.
50	6	7	78	35	58
		8		37	6
		9		38	12
—	7	—	78	39	18
		1		40	24
		2		41	30
		3		42	34
		4		43	38
		5		44	42
		6		45	48
		7		46	58
		8		48	6
		9		49	16
	8	—	78	50	24
		1		51	32
		2		52	38
		3		53	46
		4		54	52
		5		56	—
		6		57	6
		7		58	10
		8		59	18
		9	79	—	24
	9	—	79	1	34
		1		2	38
		2		3	42
		3		4	52
		4		6	—
		5		7	6
		6		8	12
		7		9	20
		8		10	26
		9		11	34
51	—	—	79	12	40
		1		13	44
		2		14	52
		3		15	58

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.
51	—	4	79	17	8
		5		18	14
		6		19	20
		7		20	30
		8		21	38
		9		22	44
	1	—	79	23	52
		1		25	—
		2		26	6
		3		27	14
		4		28	20
		5		29	26
		6		30	32
		7		31	40
		8		32	46
		9		33	54
	2	—	79	35	—
		1		36	8
		2		37	16
		3		38	22
		4		39	30
		5		40	36
		6		41	44
		7		42	50
		8		43	58
		9		45	6
	3	—	79	46	12
		1		47	20
		2		48	26
		3		49	34
		4		50	42
		5		51	48
		6		52	56
		7		54	2
		8		55	10
		9		56	18
	4	—	79	57	24

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M.	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
51	4	1	79	58	32	51	7	8	80	40	8
		2		59	40			9		41	18
		3	80	—	46		8	—	80	42	24
		4		1	45			1		43	30
		5		3	2			2		44	40
		6		4	10			3		45	46
		7		5	16			4		46	56
		8		6	24			5		48	2
		9		7	30			6		49	10
	5	—	80	8	36			7		50	16
		1		9	44			8		51	26
		2		10	52			9		52	32
		3		12	—		9	—	80	53	42
		4		13	8			1		54	48
		5		14	16			2		55	56
		6		15	22			3		57	6
		7		16	30			4		58	12
		8		17	36			5		59	22
		9		18	46			6	81	—	28
	6	—	80	19	56			7		1	38
		1		21	2			8		2	44
		2		22	8			9		3	54
		3		23	16	52	—	—		5	—
		4		24	22			1		6	6
		5		25	32			2		7	16
		6		26	38			3		8	22
		7		27	48			4		9	32
		8		28	54			5		10	38
		9		30	—			6		11	48
	7	—	80	31	10			7		12	56
		1		32	16			8		14	2
		2		33	26			9		15	12
		3		34	32		1	—	81	16	18
		4		35	40			1		17	28
		5		36	44			2		18	34
		6		37	46			3		19	44
		7		39	2			4		20	50

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R.	F.	Z.	Gr	M	S.
52	1	5	81	22	—	52	5	2	82	4	—
		6		23	6			3		5	10
		7		24	16			4		6	18
		8		25	22			5		7	26
		9		26	32			6		8	34
	2	—	81	27	40			7		9	42
		1		28	48			8		10	50
		2		29	58			9		12	12
		3		31	4		6	—	82	13	8
		4		32	14			1		14	16
		5		33	20			2		15	24
		6		34	30			3		16	32
		7		35	36			4		17	40
		8		36	46			5		18	50
		9		37	52			6		19	58
	3	—	81	39	—			7		21	8
		1		40	6			8		22	16
		2		41	16			9		23	24
		3		42	24		7	—	82	24	32
		4		43	32			1		25	40
		5		44	40			2		26	50
		6		45	50			3		27	58
		7		46	56			4		29	6
		8		48	4			5		30	16
		9		49	14			6		31	24
	4	—	81	50	20			7		32	34
		1		51	30			8		33	42
		2		52	38			9		34	52
		3		53	46		8	—	82	36	4
		4		54	54			1		37	10
		5		56	2			2		38	16
		6		57	10			3		39	28
		7		58	18			4		40	34
		8		59	28			5		41	40
		9	82	—	36			6		42	52
	5	—		1	44			7		44	4
		1		2	52			8		45	10

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	Gr	M	S.	N.	F	Z	Gr	M	S.
52	8	9	82	46	16	53	2	6	83	28	46
	9	—	82	47	28			7		29	58
		1		48	36			8		31	6
		2		49	46			9		32	14
		3		50	54		3	—	83	33	24
		4		52	—			1		34	32
		5		53	12			2		35	44
		6		54	18			3		36	52
		7		55	30			4		38	—
		8		56	38			5		39	10
		9		57	48			6		40	18
53	—	—		58	54			7		41	30
		1	83	—	2			8		42	38
		2		1	14			9		43	46
		3		2	20		4	—	83	44	56
		4		3	32			1		46	4
		5		4	38			2		47	12
		6		5	50			3		48	24
		7		6	58			4		49	32
		8		8	8			5		50	42
		9		9	14			6		51	50
	1	—	83	10	22			7		52	58
		1		11	34			8		54	10
		2		12	40			9		55	18
		3		13	52		5	—		56	28
		4		14	58			1		57	38
		5		16	6			2		58	46
		6		17	14			3		59	58
		7		18	24			4	84	1	6
		8		19	32			5		2	16
		9		20	44			6		3	26
	2	—	83	21	54			7		4	34
		1		23	4			8		5	44
		2		24	12			9		6	54
		3		25	24		6	—	84	8	2
		4		26	32			1		9	14
		5		27	40			2		10	22

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
53	6	3	84	11	32	54	—	—	84	54	30
		4		12	42			1		55	40
		5		13	50			2		56	50
		6		15	—			3		57	58
		7		16	10			4		59	10
		8		17	18			5	85	—	20
		9		18	30			6		1	30
	7	—	84	19	38			7		2	42
		1		20	48			8		3	50
		2		21	58			9		5	—
		3		23	6		1	—		6	8
		4		24	16			1		7	22
		5		25	26			2		8	30
		6		26	36			3		9	42
		7		27	46			4		10	50
		8		28	54			5		12	4
		9		30	4			6		13	12
	8	—	84	31	14			7		14	20
		1		32	22			8		15	32
		2		33	32			9		16	40
		3		34	42		2	—	85	17	54
		4		35	52			1		19	2
		5		37	2			2		20	10
		6		38	12			3		21	22
		7		39	22			4		22	30
		8		40	30			5		23	44
		9		41	40			6		24	52
	9	—	84	42	50			7		26	—
		1		44	—			8		27	12
		2		45	10			9		28	22
		3		46	20		3	—	85	29	34
		4		47	30			1		30	42
		5		48	40			2		31	50
		6		49	50			3		33	2
		7		51	—			4		34	10
		8		52	10			5		35	24
		9		53	20			6		36	32

Länge d. Geh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Geh.			Gr. d. Wink.		
N.	F.	Z.	Gr	M	S.	N.	F.	Z.	Gr	M	S.
54	3	7	85	37	42	54	7	4	86	21	12
		8		38	54			5		22	22
		9		40	4			6		23	34
	4	—	85	41	16			7		24	44
		1		42	26			8		25	56
		2		43	34			9		27	6
		3		44	46		8	—	86	28	16
		4		45	58			1		29	26
		5		47	8			2		30	36
		6		48	16			3		31	48
		7		49	28			4		33	—
		8		50	38			5		34	10
		9		51	50			6		35	22
	5	—	85	52	58			7		36	32
		1		54	8			8		37	44
		2		55	20			9		38	54
		3		56	30		9	—	86	40	4
		4		57	42			1		41	16
		5		58	50			2		42	26
		6	86	—	—			3		43	38
		7		1	12			4		44	48
		8		2	22			5		46	—
		9		3	34			6		47	10
	6	—	86	4	44			7		48	20
		1		5	56			8		49	32
		2		7	6			9		50	42
		3		8	14	55	—	—	86	51	54
		4		9	26			1		53	4
		5		10	36			2		54	16
		6		11	48			3		54	26
		7		12	58			4		56	58
		8		14	10			5		57	50
		9		15	20			6		59	—
	7	—	86	16	28			7	87	—	10
		1		17	40			8		1	22
		2		18	50			9		2	32
		3		20	—		1	—		3	44

Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.			Länge d. Seh.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.	R	F.	Z.	Gr	M	S.
55	1	1	87	4	56	55	4	8	87	49	2
		2		6	6			9		50	12
		3		7	18		5	—	87	51	22
		4		8	28			1		52	34
		5		9	40			2		53	44
		6		10	52			3		54	56
		7		12	4			4		56	6
		8		13	14			5		57	20
		9		14	24			6		58	30
	2	—	87	15	36			7		59	44
		1		16	46			8	88	—	54
		2		17	58			9		2	4
		3		19	10		6	—		3	18
		4		20	20			1		4	28
		5		21	32			2		5	42
		6		22	42			3		6	52
		7		23	54			4		8	2
		8		25	6			5		9	16
		9		26	18			6		10	26
	3	—	87	27	28			7		11	40
		1		28	38			8		12	50
		2		29	50			9		14	2
		3		31	4		7	—	88	15	16
		4		32	14			1		16	28
		5		33	30			2		17	38
		6		34	38			3		18	50
		7		35	54			4		20	—
		8		37	2			5		21	14
		9		38	12			6		22	24
	4	—	87	39	26			7		23	38
		1		40	36			8		24	50
		2		41	50			9		26	—
		3		43	—		8	—	88	27	14
		4		44	14			1		28	24
		5		45	28			2		29	38
		6		46	38			3		30	50
		7		47	52			4		32	—

Länge d. Sch.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.
55	8	5	88	33	14
		6		34	24
		7		35	38
		8		36	50
		9		38	—
	9	—	88	39	14
		1		40	24
		2		41	38
		3		42	50
		4		44	—
		5		45	14
		6		46	26
		7		47	40
		8		48	52
		9		50	2
56	—	—	88	51	16
		1		52	26
		2		53	40
		3		54	52
		4		56	2
		5		57	16
		6		58	28
		7		59	40
		8	89	—	52
		9		2	4
	1	—		3	18
		1		4	30
		2		5	42
		3		6	54
		4		8	6
		5		9	20
		6		10	30
		7		11	42
		8		12	56
		9		14	10
	2	—	89	15	22
		1		16	34

Länge d. Sch.			Gr. d. Wink.		
R.	F.	Z.	Gr	M	S.
56	2	2	89	17	46
		3		18	58
		4		20	10
		5		21	24
		6		22	36
		7		23	48
		8		25	—
		9		26	14
	3	—	89	27	26
		1		28	38
		2		29	52
		3		31	4
		4		32	16
		5		33	30
		6		34	42
		7		35	54
		8		37	8
		9		38	20
	4	—	89	39	32
		1		40	44
		2		41	58
		3		43	10
		4		44	22
		5		45	36
		6		46	48
		7		48	—
		8		49	14
		9		50	26
	5	—		51	40
		1		52	52
		2		54	6
		3		55	18
		4		56	32
		5		57	44
		6		58	56
		7	90	—	10

Druckfehler,

welche

vor dem Gebrauche der Tafeln zu berichtigen ſind:

Pag. I. muß in der Secunden-Columne, neben 1 Grad — Minute, 6 Secunden ſtehen.

— VI.	—	— —	6 Gr.	14 Min.,	22 Sec.	—	
— XXXIII.	—	— —	35 —	51 —	44 —	—	
— XLV	—	— —	48 —	40 —	32 —	—	
	—	— —	48 —	58 —	32 —	—	
	—	— —	48 —	59 —	28 —	—	

— XLVIIII. muß neben 53 Grad, 42 Minuten, 44 Secunden Statt 42 Sec. ſtehn, und bis 53 Grad, 52 Minuten, 22 Secunden, welches wieder richtig iſt, muß man ſich die Secunden alle nach einander um 1 Reihe herunter geſetzt denken, als

Statt	41	46		41	46	und gerade eben ſo von 54 Grad 27 Minuten 8 Sec., ſtatt 4 Sec. bis zu 41 Min. 38 Secunden, welches wieder richtig iſt,
	42	42	folgendes	42	44	
	43	40		43	42	
	44	38		44	40	
				⋮		
				52	22	

muß ſtehen, Statt	28 Min.	2 Sec.	folgendes	28	4
	59	—		29	2
	30	58		30	—
	30	58 ꝛc.		30	58
				⋮	
				41	38

Pag. LV. muß neben 61 Gr. 16 Min. 40 Sec. ſtehen.

— LXII.	—	—	70	—	30	—	52	—	—	
— LXV.	—	—	74	—	1	—	38	—	—	
— LXVI.	—	—	75	—	44	—	24	—	—	
— LXVIII.	—	—	78	—	2	—	42	—	—	
— LXX	—	—	80	—	1	—	54	—	—	
	—	—	80	—	17	—	38	—	—	
	—	—	—	—	23	—	18	—	—	
	—	—	—	—	36	—	46	—	—	
	—	—	—	—	37	—	56	—	—	
— LXXIV.	—	—	85	—	58	—	52	—	—	
	—	—	86	—	56	—	38	—	—	

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rommerdt, Carl Christian,

Theoretisch-praktischer Selbstunterricht in den ersten Anfangsgründen der Meßkunst

Erfurt 1804

Math.p. 478 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082688-4